

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

Una formulació matemàtica de les
modulacions musicals

Autora: Helena Villalón Forns

Directora: Dra. Pilar Bayer i Isant
Realitzat al: Departament de Matemàtiques
i Informàtica

Barcelona, 8 de juliol de 2016

Abstract

It has always been mentioned that Mathematics and Music are deeply connected, but sometimes it can be difficult to precise the how and the why. As we all know, music transmission's way is the sound, which can be represented by means of Fourier analysis as a sum of sinusoidal waves multiplied by amplitude factors. These factors are given by Fourier coefficients and, musically, they provide the harmonics of a fundamental sound and determine the timbre of a musical instrument. The purpose of this project is to use Fourier analysis in an alternative way in order to obtain a representation in coordinates of triad chords, by means of the Fourier transform of their characteristic functions. Since we identify a triad chord with a tonality, this work has allowed us to shape and visualize musical modulations in a different way from that of the traditional tonal harmony.

Resum

Sempre hem sentit dir que les matemàtiques i la música estan molt relacionades, però a vegades és difícil explicar el com i el perquè. Com tots sabem, el mitjà de transmissió de la música és el so, el qual podem representar via l'anàlisi de Fourier com a una suma d'ones sinusoidals multiplicades per factors d'amplitud. Aquests factors són donats per coeficients de Fourier i, musicalment, proporcionen els harmònics d'un so fonamental i determinen el timbre d'un instrument musical. L'objectiu d'aquest treball és fer un altre ús de l'anàlisi de Fourier a fi d'obtenir una representació en coordenades dels acords tríades a partir de les transformades de Fourier de les funcions característiques d'aquests acords. Com a aplicació, en identificar un acord tríada amb una tonalitat, el treball ens ha permès modelitzar i visualitzar les modulacions musicals d'una manera alternativa a la de l'harmonia tonal tradicional.

Agraïments

En primer lloc vull agrair a la Dra. Pilar Bayer per acceptar des d'un inici la proposta de fer matemàtiques i música i per haver-me guiat al llarg de tota l'elaboració del treball. L'entusiasme que ha mostrat durant tot el seguiment m'ha servit de motivació per seguir treballant i aprenent.

Finalment, agraeixo als 3 fantàstics el suport incondicional i la força que m'han donat sempre, especialment durant aquest últim any de carrera.

Introducció

El projecte

El so és el mitjà de transmissió de la música, el qual podem representar com a una suma de corbes sinusoidals multiplicades per factors d'amplitud. Aquestes corbes es poden caracteritzar per les magnituds i unitats de mesura de qualsevol ona de freqüència ben definida: la longitud d'ona, la freqüència, que determina l'alçada o agudesa d'un so, i l'amplitud d'ona, que determina la intensitat d'aquest so. La descomposició d'una ona periòdica com a suma d'ones sinusoidals forma part de l'*anàlisi de Fourier*.

En termes musicals un harmònic és un so que es produeix de manera natural per la vibració de les ones sonores que acompanyen un so fonamental: aquests harmònics són els que caracteritzen el timbre de cada instrument. En termes de la física un harmònic és qualsevol de les components sinusoidals d'una ona periòdica que té una freqüència múltiple enter d'una freqüència fonamental. Així doncs, cada nota emesa per un instrument musical es correspon amb una suma parcial d'una sèrie de Fourier. Cada harmònic d'una d'aquestes sèries té una amplitud determinada. En termes matemàtics, l'amplitud es correspon amb els coeficients que acompanyen les funcions sinus, els quals s'anomenen *coeficients de Fourier*.

Aquest projecte presenta un tractament diferent del so encaminat no al tractament de les *notes* sinó a la representació matemàtica dels *acords* i, més concretament, dels acords tríades. El treball partí de la lectura de l'article *The torii of phases* de E. Amiot [1], un treball de musicologia que ens ha servit d'inspiració en l'inici treball. Part de les dificultats que hem hagut de vèncer ha estat entendre la notació utilitzada per Amiot, traduir-la matemàticament d'una manera clara i entenedora, i profunditzar en les definicions i resultats del seu article, així com en algunes de les fonts que hi utilitza.

Tot i el temps dedicat a entendre conceptes d'anàlisi de Fourier i a desxifrar l'article de Amiot, aquest treball també és fruit de moltes hores davant de l'ordinador per a aprendre a usar el *Mathematica* de cara a representar visualment els resultats que anaven sorgint al llarg de la memòria. Sens dubte el poder visualitzar aquests resultats ens ha fet més fàcil la seva elaboració i interpretació.

Estructura de la Memòria

En el Capítol 1 revisem la definició de la transformada finita de Fourier d'una funció i n'estudiem les propietats que necessitarem més endavant. En particular, hi donem la definició de producte de convolució de dues funcions i relacionem la seva transformada de Fourier amb el producte terme a terme de les transformades finites de Fourier.

En la primera part del Capítol 2 estudiem les magnituds i les fases dels coeficients complexos de Fourier associats a les funcions característiques dels subconjunts de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, els quals esdevindran acords en prendre $N = 12$. Veurem que les propietats d'aquests coeficients permeten representar els acords en termes de punts de tors. Per a tal fi, incloem en el capítol la definició del tor com a superfície de revolució. A continuació hi donem una representació dels acords tríades Majors, menors i disminuïts en un tor, el qual hem anomenat *tor de les tonalitats*.

Un cop situats els acords en el tor, en el Capítol 3 introduïm una definició per a la distància entre dos acords i, a partir dels seus valors, formulem diferents maneres de modular musicalment. Representem aquestes modulacions musicals en forma de grafs, i busquem la relació que hi tenen certs meridians del tor de les tonalitats, que hem anomenat *meridians tonals*. Finalment, representem aquestes modulacions en una partitura per tal de veure i escoltar el seu comportament.

El Capítol 4 de la memòria és un índex que conté totes les funcions que hem creat en *Mathematica* per a la realització del treball, amb una petita explicació del què fan. Tots els programes es troben a l'annex.

Annex a la Memòria

Aquesta memòria s'acompanya d'un annex on hi ha els programes en *Mathematica* 10.4 que s'han anat realitzant al llarg del treball per tal de visualitzar-ne els resultats. Aquest annex consta de cinc capítols, ordenats per aparició en la memòria. En el primer, *Acords Majors i acords menors*, trobem totes les funcions usades per a representar i visualitzar els acords Majors i els acords menors. A continuació trobem *Acords disminuïts*, que conté el mateix que el programa anterior però de cara a l'estudi dels acords disminuïts. En el capítol 3, *Camins entre acords*, es calculen les distàncies entre dos acords, i es representen les modulacions musicals en forma de graf. A *Meridians tonals* es representen meridians sobre el tor de les tonalitats, i finalment en el capítol 5, *Acords Augmentats*, es dona la representació d'aquest tipus d'acord sobre el tor de les tonalitats.

Contingut

1	La transformada finita de Fourier	1
1.1	Definició de TFF	1
1.2	Propietats elementals	4
1.3	Productes de convolució. Identitat de Parseval	11
1.4	Funcions de mostreig	15
2	El tor de les tonalitats	17
2.1	El tor com a superfície de revolució	17
2.2	Magnituds i fases	20
2.2.1	TFF d'un acord	21
2.2.2	Magnitud dels coeficients de Fourier. Teorema de Lewin	23
2.2.3	Fase dels coeficients de Fourier	26
2.3	Representació d'acords tríades en el tor	28
2.3.1	Els acords Majors i els acords menors	28
2.3.2	Els acords disminuïts	32
3	Modulacions musicals sobre el tor	35
3.1	Distància entre dos acords	35
3.2	Representació gràfica de les modulacions	36
3.2.1	Cicles modals	36
3.2.2	El graf hamiltonià de les tríades	38
3.3	Meridians tonals	40
3.3.1	Els acords augmentats	42
3.4	Representació musical dels grafs tonals	45
4	Mathematica notebooks	49
4.1	Acords Majors i acords menors	49
4.2	Acords disminuïts	50

4.3	Camins entre acords	51
4.4	Meridians tonals	51
4.5	Acords Augmentats	53
	Conclusions	55
	Bibliografia	57

Capítol 1

La transformada finita de Fourier

1.1 Definició de TFF

Sigui $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ el conjunt de totes les classes de restes mòdul un enter N , i sigui $\mathcal{N} = \{0, 1, \dots, N-1\}$ el conjunt dels representants de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Al llarg de tot el capítol anomenarem $\omega = \omega_N = e^{\frac{2\pi i}{N}}$ l'arrel complexa d'ordre N de la unitat, solució de l'equació $X^N - 1 = 0$.

Definició 1.1.1. *Sigui $f : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, de manera que $(f(0), \dots, f(N-1)) \in \mathbb{C}^N$. La transformada finita de Fourier (TFF) de f és una funció $\hat{f} : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, definida com*

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f(m) \omega^{-nm}, \quad \text{per a } 0 \leq n \leq N-1.$$

El nombre $\hat{f}(n)$ és el n -èsim coeficient de Fourier de la funció f .

D'una manera similar a la fórmula anterior, podem expressar f com la transformada inversa finita de Fourier de \hat{f} . Abans però, ens calen alguns lemes i propietats per tal de demostrar-ne la fórmula.

Lema 1.1.1. *La suma de les N arrels de la unitat de l'equació $X^N - 1 = 0$ és zero.*

Demostració. La suma és el coeficient de X^{N-1} , o bé, usant la pròpia definició de la suma finita d'una sèrie geomètrica obtenim el resultat:

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2k\pi i}{N}} = \frac{1 - e^{\frac{2N\pi i}{N}}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{N}}} = \frac{1 - e^{2\pi i}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{N}}} = \frac{1 - 1}{1 - e^{\frac{2\pi i}{N}}} = 0.$$

□

Lema 1.1.2 (Relació d'ortogonalitat de les arrels de la unitat). *Segui $\omega = e^{\frac{2\pi i}{N}}$ solució de l'equació $X^N - 1 = 0$, aleshores se satisfà que*

$$\sum_{n=0}^{N-1} \omega^{-nj} \omega^{nm} = N \delta_{jm}^N,$$

on δ_{jm}^N indica la delta de Kronecker, definida com

$$\delta_{jm}^N = \begin{cases} 1, & \text{si } j \equiv m \pmod{N} \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Corol·lari 1.1.1. *Segui $f : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, aleshores*

$$\sum_j f(j) \delta_{jm}^N = f(m).$$

Proposició 1.1.1. *Segui $\widehat{f} : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ la transformada finita de Fourier de la funció $f : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, aleshores*

$$f(m) = \sum_{n=0}^{N-1} \widehat{f}(n) \omega^{nm}, \quad \text{per a } 0 \leq m \leq N-1,$$

és a dir, que recuperem la funció f a partir dels seus coeficients de Fourier.

Demostració. Aplicant la definició de la transformada de Fourier tenim el següent:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \widehat{f}(n) \omega^{nm} &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(j) \omega^{-nj} \right) \omega^{nm} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{j=0}^{N-1} f(j) \omega^{-nj} \right) \omega^{nm} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(j) \sum_{n=0}^{N-1} \omega^{-nj} \omega^{nm} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(j) \sum_{n=0}^{N-1} \omega^{n(m-j)}. \end{aligned}$$

Finalment, usant el Lema 1.1.1 i el Lema 1.1.2 obtenim que

$$\sum_{n=0}^{N-1} \widehat{f}(n) \omega^{nm} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(j) \sum_{n=0}^{N-1} \omega^{n(m-j)} = \sum_{j=0}^{N-1} f(j) \delta_{jm}^N = f(m).$$

□

En altres paraules, amb aquesta proposició estem dient que la representació de $f(m)$ com un polinomi finit avaluat en arrels de la unitat ω és única.

Per a facilitar la lectura, els coeficients de Fourier de la funció $f(m)$ els denotarem $a(n)$. Per tant, des d'ara i al llarg de tot el capítol, usarem les definicions següents per a la transformada finita de Fourier i per a la transformada inversa finita de Fourier:

$$a(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f(m) \omega^{-nm} \quad \text{per a } 0 \leq n \leq N-1, \quad (1.1.1)$$

$$f(m) = \sum_{n=0}^{N-1} a(n) \omega^{nm} \quad \text{per a } 0 \leq m \leq N-1. \quad (1.1.2)$$

Proposició 1.1.2. *La funció exponencial en funció de n o de m , ω^{nm} , és periòdica de període N ; és a dir*

$$\omega^{nm} = \omega^{n(m+N)} = \omega^{m(n+N)}.$$

Corol·lari 1.1.2. *Les funcions $a(n)$ i $f(m)$ són periòdiques de període N .*

A partir d'ara considerarem $f(m)$ i $a(n)$ definides per a tots els enters. Pel fet de ser funcions periòdiques de període N , les funcions f i a satisfan les igualtats

$$\begin{aligned} f(m) &= f(kN + m), \\ a(n) &= a(kN + n), \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

per a $k \in \mathbb{Z}$.

L'extensió periòdica (1.1.3) de funcions finites a funcions infinites és molt convenient, ja que simplifica les demostracions de les propietats de les transformades finites de Fourier, i fa que els resultats siguin fàcils de visualitzar. Les funcions finites sempre es poden recuperar tenint en compte el seu valor en els punts $0, \dots, N-1$.

Així doncs, com a conseqüència de les igualtats (1.1.3) en traiem les relacions que veiem a continuació, les quals usarem sovint en el que resta de capítol:

$$\begin{aligned} f(-m) &= f(N - m), \\ a(-n) &= a(N - n). \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

Corol·lari 1.1.3. *Per la periodicitat de període N de les funcions $f(m)$, $a(n)$ i $\omega^{nm} = e^{\frac{2\pi i nm}{N}}$, la suma d'aquestes sobre l'interval $[-(N-1), 0]$ és la mateixa que sobre $[0, N-1]$. És a dir,*

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} a(n) \omega^{nm} &= \sum_{n=-(N-1)}^0 a(n) \omega^{nm}, \\ \sum_{m=0}^{N-1} f(m) \omega^{-nm} &= \sum_{m=-(N-1)}^0 f(m) \omega^{-nm}. \end{aligned}$$

1.2 Propietats elementals

Definició 1.2.1. *Segui $a(n)$ la transformada finita de Fourier de $f(m)$. Direm que $f(m)$ i $a(n)$ són una parella finita de Fourier, i ho notarem amb una fletxa doble connectant les dues funcions, $f(m) \leftrightarrow a(n)$.*

Teorema 1.2.1. *La transformada finita de Fourier és lineal. És a dir, si $f_1(m) \leftrightarrow a_1(n)$ i $f_2(m) \leftrightarrow a_2(n)$, aleshores per a tot $a, b \in \mathbb{C}$*

$$af_1(m) + bf_2(m) \leftrightarrow aa_1(n) + ba_2(n).$$

Demostració. Com que $f_1(m) \leftrightarrow a_1(n)$ i $f_2(m) \leftrightarrow a_2(n)$, definim $f_1(m)$ i $f_2(m)$ com

$$f_1(m) = \sum_{n=0}^{N-1} a_1(n) \omega^{nm}.$$

$$f_2(m) = \sum_{n=0}^{N-1} a_2(n) \omega^{nm}.$$

Aleshores, per a tot $a, b \in \mathbb{C}$, tenim

$$af_1(m) + bf_2(m) = a \sum_{n=0}^{N-1} a_1(n) \omega^{nm} + b \sum_{n=0}^{N-1} a_2(n) \omega^{nm} = \sum_{n=0}^{N-1} (aa_1(n) + ba_2(n)) \omega^{nm}.$$

Per tant,

$$af_1(m) + bf_2(m) \leftrightarrow aa_1(n) + ba_2(n).$$

□

Teorema 1.2.2. *Si $f(m) \leftrightarrow a(n)$, aleshores $f(-m) \leftrightarrow a(-n)$.*

Demostració. Definim la funció $f(-m)$ com,

$$f(-m) = \sum_{n=0}^{N-1} a(n) \omega^{-nm}.$$

Si fem el canvi $j = -n$, aleshores

$$f(-m) = \sum_{j=-(N-1)}^0 a(-j) \omega^{jm}.$$

Per la periodicitat de període N de $a(-j)$ i ω^{jm} , la suma sobre l'interval $[-(N-1), 0]$ és la mateixa que sobre $[0, N-1]$. Per tant, si tornem a fer el canvi $n = j$, obtenim

$$f(-m) = \sum_{n=0}^{N-1} a(-n) \omega^{nm} \implies f(-m) \leftrightarrow a(-n).$$

□

Definició 1.2.2. Sigui $g : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ una funció. Diem que $g(m)$ és parella si $g(m) = g(-m)$, i diem que és imparella si $g(m) = -g(-m)$.

Corol·lari 1.2.1. Siguin $a(n)$ i $f(m)$ tals que $f(m) \leftrightarrow a(n)$. Aleshores,

1) $f(m)$ és parella $\iff a(n)$ és parella.

2) $f(m)$ és imparella $\iff a(n)$ és imparella.

Demostració.

1) Sigui $f(m)$ parella, és a dir $f(m) = f(-m)$. Aleshores,

$$f(m) = f(-m) \iff \sum_{n=0}^{N-1} a(n)\omega^{nm} = \sum_{n=0}^{N-1} a(n)\omega^{-nm}.$$

Fent el canvi $j = -n$ i usant la periodicitat de ω^{nm} i de $a(n)$, obtenim que

$$\sum_{n=0}^{N-1} a(n)\omega^{nm} = \sum_{j=0}^{N-1} a(-j)\omega^{jm}.$$

Finalment, amb el canvi $n = j$ obtenim

$$\sum_{n=0}^{N-1} a(n)\omega^{nm} = \sum_{n=0}^{N-1} a(-n)\omega^{nm} \iff a(n) = a(-n).$$

Per tant $f(m)$ és parella $\iff a(n)$ també ho és.

2) Sigui $f(m)$ imparella, és a dir $f(m) = -f(-m)$. Aleshores,

$$f(m) = -f(-m) \iff \sum_{n=0}^{N-1} a(n)\omega^{nm} = \sum_{n=0}^{N-1} -a(n)\omega^{-nm}.$$

Fent el canvi $j = -n$ i usant la periodicitat de ω^{nm} i de $a(n)$, obtenim que

$$\sum_{n=0}^{N-1} a(n)\omega^{nm} = \sum_{n=0}^{N-1} -a(-n)\omega^{-nm} = \sum_{j=0}^{N-1} -a(-j)\omega^{jm}.$$

Finalment, amb el canvi $n = j$ obtenim

$$\sum_{n=0}^{N-1} a(n)\omega^{nm} = \sum_{n=0}^{N-1} -a(-n)\omega^{nm} \iff a(n) = -a(-n).$$

Per tant $f(m)$ és imparella $\iff a(n)$ també ho és.

□

Així doncs, si $g(m)$ és una funció parella periòdica de període N aleshores $g(m) = g(-m) = g(N - m)$. En canvi si $g(m)$ és una funció imparella periòdica de període N aleshores $g(m) = -g(-m) = g(N - m)$. Per tant, sobre l'interval $[0, N - 1]$ la paritat en un sentit o altre de la funció $g(m)$ mostra simetries en els valors de les funcions avaluades en els punts m i $N - m$.

Considerem ara $\bar{g}(m)$ la conjugada complexa de la funció $g(m)$.

Teorema 1.2.3. *Siguin $f(m)$ i $a(n)$ tals que $f(m) \leftrightarrow a(n)$. Aleshores,*

$$1) \quad \bar{f}(m) \leftrightarrow \bar{a}(-n).$$

$$2) \quad \bar{f}(-m) \leftrightarrow \bar{a}(n).$$

Demostració. Usarem el fet que la conjugada d'una arrel de la unitat ω és $\bar{\omega} = \frac{1}{\omega}$, i el fet que $f(m)$ i $a(n)$ són periòdiques de període N .

1) Fent el canvi $j = -n$, obtenim el següent

$$f(m) = \sum_{n=0}^{N-1} a(n)\omega^{nm} \implies \bar{f}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{a}(n)\omega^{-nm} \implies \bar{f}(m) = \sum_{j=-(N-1)}^0 \bar{a}(-j)\omega^{jm}.$$

Finalment, posem $n = j$ i obtenim

$$\bar{f}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{a}(-n)\omega^{nm}.$$

És a dir, que $\bar{f}(m) \leftrightarrow \bar{a}(-n)$.

2) La demostració en aquest cas surt de la pròpia definició:

$$f(-m) = \sum_{n=0}^{N-1} a(n)\omega^{-nm} \implies \bar{f}(-m) = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{a}(n)\omega^{nm}.$$

És a dir, que $\bar{f}(-m) \leftrightarrow \bar{a}(n)$.

□

Corol·lari 1.2.2. *Siguin $a(n)$ i $f(m)$ les funcions definides en (1.1.1) i (1.1.2), tals que $f(m) \leftrightarrow a(n)$. Aleshores:*

$$1) \quad f(m) \text{ real} \iff a(n) = \bar{a}(-n) = \bar{a}(N - n).$$

$$2) \quad a(n) \text{ real} \iff f(m) = \bar{f}(-m) = \bar{f}(N - m).$$

$$3) \quad f(m) \text{ imaginari pur} \iff a(n) = -\bar{a}(-n) = -\bar{a}(N - n).$$

$$4) \quad a(n) \text{ imaginari pur} \iff f(m) = -\bar{f}(-m) = -\bar{f}(N - m).$$

Demostració.

- 1) \Rightarrow) $f(m)$ real $\iff f(m) = \overline{f(m)}$. D'altra banda pel Teorema 1.2.3 tenim $f(m) \leftrightarrow a(n) \implies \overline{f(m)} \leftrightarrow \overline{a(-n)}$, i per tant $a(n) = \overline{a(-n)}$. Finalment, per la periodicitat de període N de $a(n)$ i $\overline{a(n)}$, tenim $a(n) = \overline{a(-n)} = \overline{a(N-n)}$.
- \Leftarrow) Sigui $a(n) = \overline{a(-n)} = \overline{a(N-n)}$. Com que $f(m) \leftrightarrow a(n)$, pel Teorema 1.2.3 tenim que $\overline{f(m)} \leftrightarrow \overline{a(-n)}$. Aleshores $f(m) = \overline{f(m)}$, i per tant $f(m)$ és real.
- 2) \Rightarrow) $a(n)$ real $\iff a(n) = \overline{a(n)}$. D'altra banda pel Teorema 1.2.3 tenim $f(m) \leftrightarrow a(n) \implies \overline{f(-m)} \leftrightarrow \overline{a(n)}$, i per tant $f(m) = \overline{f(-m)}$. Finalment, per la periodicitat de període N de $f(m)$ i $\overline{f(m)}$, tenim $f(m) = \overline{f(m)} = \overline{f(N-m)}$.
- \Leftarrow) Sigui $f(m) = \overline{f(-m)} = \overline{f(N-m)}$. Com que $f(m) \leftrightarrow a(n)$, pel Teorema 1.2.3 tenim que $\overline{f(-m)} \leftrightarrow \overline{a(n)}$. Aleshores $a(n) = \overline{a(n)}$, i per tant $a(n)$ és real.
- 3) \Rightarrow) $f(m)$ imaginari pur $\iff f(m) = -\overline{f(m)}$. D'altra banda, pel Teorema 1.2.3 tenim $f(m) \leftrightarrow a(n) \implies -\overline{f(m)} \leftrightarrow -\overline{a(-n)}$, i per tant $a(n) = -\overline{a(-n)}$. Finalment, per la periodicitat de període N de les seqüències $a(n)$ i $\overline{a(n)}$ aleshores $a(n) = -\overline{a(-n)} = -\overline{a(N-n)}$.
- \Leftarrow) Sigui $a(n) = -\overline{a(-n)} = -\overline{a(N-n)}$. Com que $f(m) \leftrightarrow a(n)$, pel Teorema 1.2.3 tenim que $-\overline{f(m)} \leftrightarrow -\overline{a(-n)}$. Aleshores $f(m) = -\overline{f(m)}$, i per tant $f(m)$ és imaginari pur.
- 4) \Rightarrow) $a(n)$ imaginari pur $\iff a(n) = -\overline{a(n)}$. D'altra banda, pel Teorema 1.2.3 tenim que $f(m) \leftrightarrow a(n) \implies -\overline{f(-m)} \leftrightarrow -\overline{a(-n)}$, per tant $f(m) = -\overline{f(-m)}$. Finalment, per la periodicitat de període N de les seqüències $f(m)$ i $\overline{f(m)}$ aleshores $f(m) = -\overline{f(-m)} = -\overline{f(N-m)}$.
- \Leftarrow) Per hipòtesi $f(m) = \overline{f(-m)} = -\overline{f(N-m)}$. Com que $f(m) \leftrightarrow a(n)$, pel Teorema 1.2.3 tenim que $-\overline{f(m)} \leftrightarrow -\overline{a(-n)}$. Aleshores $a(n) = -\overline{a(-n)}$, i per tant $a(n)$ és imaginari pur.

□

Corol·lari 1.2.3. *Siguin $a(n)$ i $f(m)$ les funcions definides en (1.1.1) i (1.1.2) tals que $a(n) \leftrightarrow f(m)$. Aleshores:*

- 1) $f(m)$ real i parella $\iff a(n)$ real i parella.
- 2) $f(m)$ real i imparella $\iff a(n)$ imaginari pur i imparella.
- 3) $f(m)$ imaginari pur i parella $\iff a(n)$ imaginari pur i parella.
- 4) $f(m)$ imaginari pur i imparella $\iff a(n)$ real i imparella.

Demostració.

- 1) Pel Corol·lari 1.2.2, $f(m)$ real $\iff a(n) = \bar{a}(-n)$. D'altra banda, pel Corol·lari 1.2.1, $f(m)$ parella $\iff a(n)$ parella $\iff a(n) = a(-n)$. Aleshores $a(-n) = \bar{a}(-n)$. Així doncs, tenim que $a(n) = \bar{a}(n)$, i per tant $a(n)$ és real i parella.
- 2) Pel Corol·lari 1.2.2, $f(m)$ real $\iff a(n) = \bar{a}(-n)$. D'altra banda, pel Corol·lari 1.2.1, $f(m)$ imparella $\iff a(n)$ imparell $\iff a(n) = -a(-n)$. Aleshores $a(n) = -a(-n) = \bar{a}(n)$. Així doncs, tenim que $a(n) = -\bar{a}(n)$, i per tant $a(n)$ és imaginari pur i imparella.
- 3) Pel Corol·lari 1.2.2, $f(m)$ imaginari pur $\iff a(n) = -\bar{a}(-n)$. D'altra banda, pel Corol·lari 1.2.1, $f(m)$ parella $\iff a(n)$ parell $\iff a(n) = a(-n)$. Aleshores $a(n) = a(-n) = -\bar{a}(-n)$. Així doncs, $a(n) = -\bar{a}(n)$, per tant $a(n)$ imaginari pur i parella.
- 4) Pel Corol·lari 1.2.2, $f(m)$ imaginari pur $\iff a(n) = -\bar{a}(-n)$. D'altra banda, pel Corol·lari 1.2.1, $f(m)$ imparella $\iff a(n)$ imparell $\iff a(n) = -a(-n)$. Aleshores $a(n) = -a(-n) = -\bar{a}(-n)$. Així doncs, $a(n) = \bar{a}(n)$, i per tant $a(n)$ real i imparella.

□

Usant la linealitat de la transformada de Fourier i el Corol·lari 1.2.2, és fàcil trobar la fórmula per a obtenir les transformades finites de Fourier de dues funcions reals simultàniament.

Siguin $f_1(m)$ i $f_2(m)$ reals, i $a_1(n)$, $a_2(n)$ les seves transformades finites de Fourier, de manera que $f_1(m) \leftrightarrow a_1(n)$ i $f_2(m) \leftrightarrow a_2(n)$. Definim la funció $f(m)$ com $f(m) = f_1(m) + if_2(m)$. Sigui $a(n)$ la seva transformada finita de Fourier, aleshores per linealitat $a(n) = a_1(n) + ia_2(n)$. Per tant, $a(N - n) = a_1(N - n) + ia_2(N - n)$ i clarament,

$$\bar{a}(N - n) = \bar{a}_1(N - n) - i\bar{a}_2(N - n).$$

Com que $f_1(m)$ i $f_2(m)$ són reals, pel Corol·lari 1.2.2 tenim que $\bar{a}_1(N - n) = a_1(n)$ i $\bar{a}_2(N - n) = a_2(n)$. Finalment l'expressió per $\bar{a}(N - n)$ esdevé

$$\bar{a}(N - n) = a_1(n) - ia_2(n).$$

Combinant-la amb l'expressió inicial $a(n) = a_1(n) + ia_2(n)$, obtenim

$$\begin{aligned} a_1(n) &= \frac{a(n) + \bar{a}(N - n)}{2}, \\ a_2(n) &= \frac{a(n) - \bar{a}(N - n)}{2i}. \end{aligned}$$

El Teorema que veurem a continuació descriu el comportament de la parella de Fourier quan una de les funcions és desplaçada al llarg de l'eix m (temps) o de l'eix n (freqüència).

Teorema 1.2.4. *Siguin $a(n)$ i $f(m)$ les funcions definides en (1.1.1) i (1.1.2) tals que $f(m) \leftrightarrow a(n)$. Aleshores:*

- 1) $f(m - k) \leftrightarrow \omega^{-nk} a(n)$.
- 2) $\omega^{km} f(m) \leftrightarrow a(n - k)$.

Demostració.

- 1) Per la pròpia definició de $f(m)$, tenim que

$$f(m - k) = \sum_{n=0}^{N-1} a(n) \omega^{n(m-k)} = \sum_{n=0}^{N-1} \omega^{-nk} a(n) \omega^{nm}.$$

Per tant $f(m - k) \leftrightarrow \omega^{-nk} a(n)$.

- 2) Per la pròpia definició de $a(n)$, tenim que

$$a(n - k) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f(m) \omega^{-(n-k)m} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \omega^{km} f(m) \omega^{-nm}.$$

Per tant $\omega^{km} f(m) \leftrightarrow a(n - k)$.

□

Notem que movent $f(m)$ respecte de m canvia el valor de l'arrel n -èsima de la unitat, però no canvia l'amplitud de les components de $a(n)$.

Definició 1.2.3. *Definim la discretització de la Delta de Dirac com la funció*

$$\delta(m) = \begin{cases} 1, & \text{si } m \equiv 0 \pmod{N} \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Teorema 1.2.5. *Sigui $\delta(m)$ la discretització de la Delta de Dirac. Aleshores,*

- 1) $\delta(m) \leftrightarrow \frac{1}{N}$.
- 2) $1 \leftrightarrow \delta(n)$.

Demostració.

1) La transformada finita de Fourier de la funció $\delta(m)$ és

$$a(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \delta(m) \omega^{-nm} = \frac{1}{N}.$$

Per tant, $\delta(m) \leftrightarrow \frac{1}{N}$.

2) Els coeficients de Fourier de la funció constant 1 són de la forma següent:

$$a(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \omega^{-nm} = \begin{cases} 1, & \text{si } n \equiv 0 \pmod{N} \\ 0, & \text{altrament} \end{cases} = \delta(n).$$

Per tant, $1 \leftrightarrow \delta(n)$.

Aquest últim teorema és molt útil. Per exemple, suposem que tenim la transformada de $f(m)$ i volem la transformada de $f(m) - k$; això significa que volem desplaçar $f(m)$ amunt o avall en k unitats. Llavors, si $f(m) \leftrightarrow a(n)$, aleshores $f(m) - k \leftrightarrow a(n) - k\delta(n)$. Ara, $a(n) - k\delta(n)$ és només $a(n)$ amb $a(0)$ reemplaçat per $a(0) - k$. Per aquesta raó, restar una constant de tots els valors de $f(m)$ és equivalent, en dominis de freqüència, que restar aquesta mateixa constant a $a(0)$.

Teorema 1.2.6. *Siguin $a(n)$ i $f(m)$ les funcions definides en (1.1.1) i (1.1.2) tals que $f(m) \leftrightarrow a(n)$. Aleshores:*

$$1) f(0) = \sum_{n=0}^{N-1} a(n).$$

$$2) a(0) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f(m).$$

Demostració. Obtenim el resultat directament usant les pròpies definicions de $f(m)$ i $a(0)$ avaluades en el 0.

$$1) f(0) = \sum_{n=0}^{N-1} a(n) \omega^{n0} = \sum_{n=0}^{N-1} a(n).$$

$$2) a(0) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f(m) \omega^{-0m} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f(m).$$

□

Aquest resultat és útil en aplicacions estadístiques. Si $f(m)$ és un conjunt d'observacions d'una variable aleatòria, aleshores $a(0)$ és la mitjana de la mostra.

1.3 Productes de convolució. Identitat de Parseval

En aquest apartat tractarem el tema de la transformada finita de Fourier d'un producte terme a terme de dues funcions $g_1(m)$ i $g_2(m)$, definides en $g_1, g_2 : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$.

Definició 1.3.1. *Es defineix el producte terme a terme de $g_1(m)$ i $g_2(m)$ com la funció tal que el seu m -èsim terme és $g_1(m)g_2(m)$.*

Definició 1.3.2. *Es defineix el producte de convolució de $g_1(m)$ i $g_2(m)$ com*

$$(g_1 * g_2)(m) = \sum_{k=0}^{N-1} g_1(k)g_2(m-k).$$

Siguin $f_1(m)$ i $f_2(m)$ dues funcions, i $a_1(n)$ i $a_2(n)$ les seves respectives transformades finites de Fourier. La transformada inversa del *producte terme a terme* de $a_1(n)$ i $a_2(n)$ resulta ser el *producte de convolució* de les funcions $f_1(m)$ i $f_2(m)$. D'una manera similar, la transformada de la funció $f_1(m)f_2(m)$ és la convolució de $a_1(n)$ i $a_2(n)$. En el teorema següent s'especifiquen i es demostren aquestes relacions.

Teorema 1.3.1. *Si $f_1(m) \leftrightarrow a_1(n)$ i $f_2(m) \leftrightarrow a_2(n)$, aleshores*

$$1) \quad \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_1(k)f_2(m-k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_1(m-k)f_2(k) \leftrightarrow a_1(n)a_2(n).$$

$$2) \quad f_1(m)f_2(m) \leftrightarrow \sum_{k=0}^{N-1} a_1(k)a_2(n-k) = \sum_{k=0}^{N-1} a_1(n-k)a_2(k).$$

Demostració.

1)

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_1(k)f_2(m-k) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{n_1=0}^{N-1} a_1(n_1)\omega^{n_1k} \right) \left(\sum_{n_2=0}^{N-1} a_2(n_2)\omega^{n_2(m-k)} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} a_1(n_1)a_2(n_2)\omega^{mn_2} \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k(n_1-n_2)}. \end{aligned}$$

Usant les relacions d'ortogonalitat, és a dir,

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{n_1k}\omega^{-n_2k} = \begin{cases} N, & \text{si } n_1 \equiv n_2 \pmod{N} \\ 0, & \text{altrament,} \end{cases}$$

tenim que $n_1 = n_2 = n$ i

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_1(k) f_2(m-k) = \sum_{n=0}^{N-1} a_1(n) a_2(n) \omega^{nm}$$

i, per tant, $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_1(k) f_2(m-k) \leftrightarrow a_1(n) a_2(n)$.

Seguint el mateix argument es demostra la segona relació,

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_1(m-k) f_2(k) \leftrightarrow a_1(n) a_2(n)$$

i, per tant, es demostra la igualtat de l'enunciat.

2)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} a_1(k) a_2(n-k) &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m_1=0}^{N-1} \frac{1}{N} f_1(m_1) \omega^{-km_1} \right) \left(\sum_{m_2=0}^{N-1} \frac{1}{N} f_2(m_2) \omega^{-(n-k)m_2} \right) \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{m_1=0}^{N-1} \sum_{m_2=0}^{N-1} f_1(m_1) f_2(m_2) \omega^{-nm_2} \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{km_2} \omega^{-km_1}. \end{aligned}$$

Usem les relacions d'ortogonalitat de la mateixa manera que en 1). Obtenim el següent

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{-m_1 k} \omega^{m_2 k} = \begin{cases} N, & \text{si } m_1 \equiv m_2 \pmod{N} \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Així doncs, tenim que $m = m_1 = m_2$, i

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{km_2} \omega^{-km_1} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f_1(m) f_2(m) \omega^{-nm},$$

per tant $f_1(m) f_2(m) \leftrightarrow \sum_{k=0}^{N-1} a_1(k) a_2(n-k)$.

Seguint el mateix argument es demostra la segona relació,

$$f_1(m) f_2(m) \leftrightarrow \sum_{k=0}^{N-1} a_1(n-k) a_2(k).$$

Així doncs, es demostra la igualtat de l'enunciat.

□

Les igualtats del teorema indiquen que la convolució és una operació commutativa. A més, notem que el producte de convolució és una operació cíclica; és a dir que quan una de les funcions es mou sobre el final de l'altra, trobem una extensió periòdica de la funció.

Exemple. Sigui $N = 8$, el producte de convolució de les funcions $g_1(m)$ i $g_2(m)$ avaluat en $m = 3$ és el següent:

$$g_1(0)g_2(3) + g_1(1)g_2(2) + g_1(2)g_2(1) + \cdots + g_1(7)g_2(4).$$

A continuació considerem la operació que es coneix amb el nom de *producte retardat* de dues funcions, que s'obté en multiplicar la transformada de Fourier d'una funció per la transformada de Fourier d'una altra amb un argument negatiu.

Corol·lari 1.3.1. Si $f_1(m) \leftrightarrow a_1(n)$ i $f_2(m) \leftrightarrow a_2(n)$, aleshores

$$1) \quad \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_1(k+m)f_2(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_1(k)f_2(k-m) \leftrightarrow a_1(n)a_2(-n).$$

$$2) \quad \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_1(k)f_2(k+m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_1(k-m)f_2(k) \leftrightarrow a_1(-n)a_2(n).$$

$$3) \quad f_1(m)f_2(-m) \leftrightarrow \sum_{k=0}^{N-1} a_1(k+n)a_2(k) = \sum_{k=0}^{N-1} a_1(k)a_2(k-n).$$

$$4) \quad f_1(-m)f_2(m) \leftrightarrow \sum_{k=0}^{N-1} a_1(k)a_2(k+n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_1(k-n)a_2(k).$$

Demostració. El Corol·lari es dedueix directament del Teorema 1.3.1 i el Teorema 1.2.2, ja que el producte retardat de $f_1(m)$ i $f_2(m)$ és simplement la convolució de $f_1(m)$, amb transformada $a_1(n)$, i la inversa de $f_2(m)$, és a dir $f_2(N-m)$, amb transformada $a_2(-n)$.

□

Tot i que hi ha una evident relació entre convolució i producte retardat, hi ha algunes diferències entre ells. Per exemple, el producte retardat no és commutatiu.

Exemple. Sigui $N = 8$, el producte retardat de les funcions $g_1(m)$ i $g_2(m)$ avaluat en $m = 3$ utilitzant la definició 1) del Corol·lari anterior és el següent:

$$g_1(3)g_2(0) + g_1(4)g_2(1) + g_1(5)g_2(2) + \cdots + g_1(2)g_2(7).$$

En els dos exemples donats, pel producte de convolució i pel producte retardat, es veu l'efecte cíclic d'aquest tipus de producte.

Usant el fet que la funció $a(n)$ es comporta de manera que $a(-n) = a(N - n)$, i agafant la definició 1) del mateix Corol·lari 1.3.1, obtenim que

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_1(k+m) f_2(k) \leftrightarrow a_1(n) a_2(N-n).$$

A més, si $f(m)$ és real, aleshores $a(-n) = a(N-n) = \bar{a}(n)$, i per tant

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_1(k+m) f_2(k) \leftrightarrow a_1(n) \bar{a}_2(n).$$

Entre d'altres coses, l'última expressió i el Corol·lari 1.2.3 demostren que el producte retardat definit en el Corol·lari 1.3.1 1) i el producte de convolució són el mateix si $f_2(m)$ és real i parella. El producte retardat definit en Corol·lari 1.3.1 2) és igual que la convolució si $f_1(m)$ és real i parell. Si les dues sèries són reals i parelles, aleshores totes tres són iguals.

Tot i que no ens serà necessària per a la resta del treball, podem ara demostrar de manera senzilla el resultat següent.

Corol·lari 1.3.2 (Identitat de Parseval). *Si $f(m) \leftrightarrow a(n)$, aleshores*

$$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |f(m)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |a(n)|^2.$$

Demostració. Sigui $f(m) = f_1(m) \leftrightarrow a(n)$ i $\bar{f}(m) = f_2(m) \leftrightarrow a_2(n)$. Per l'apartat 1) del Corol·lari 1.3.1 tenim

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(k+m) \bar{f}(k) \leftrightarrow a(n) a_2(-n).$$

D'altra banda, pel Teorema 1.2.3 tenim que $\bar{f}(m) \leftrightarrow \bar{a}(-n)$, i per tant

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(k+m) \bar{f}(k) \leftrightarrow a(n) \bar{a}(n) = |a(n)|^2.$$

Finalment usem el Teorema 1.2.6 de manera que, per a $m = 0$ obtenim

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \bar{f}(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |f(k)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |a(n)|^2.$$

□

1.4 Funcions de mostreig

A més de les aplicacions que veurem dels conceptes anteriors, la TFF és també important en la representació digital del so a causa del teorema següent.

Definició 1.4.1. *Sigui $g(m)$ una funció, amb $m \in \mathcal{N}$, i sigui K un enter positiu divisor de N . Definim la funció de mostreig de g com*

$$S_g(m) = g(mK) \text{ amb } m = 0, \dots, \frac{N}{K} - 1.$$

Aquesta funció és periòdica de període $\frac{N}{K}$. A continuació veurem la relació d'aquest tipus de funció amb la seva transformada finita de Fourier.

Teorema 1.4.1 (Teorema del mostreig). *Si $f(m) \leftrightarrow a(n)$, aleshores*

$$1) S_f(m) \leftrightarrow \sum_{l=0}^{K-1} a(n + \frac{lN}{K}).$$

$$2) \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{K-1} f(m + \frac{lN}{K}) \leftrightarrow S_a(n).$$

Demostració. Per definició de la transformada inversa finita de Fourier de $a(n)$, tenim

$$S_f(m) = f(mK) = \sum_{n=0}^{N-1} a(n) e^{\frac{2\pi i}{N} nmK} = \sum_{n=0}^{N-1} a(n) e^{\frac{2\pi i}{N/K} nm}.$$

Com que $e^{\frac{2\pi i}{N/K} nm}$ és periòdica de període $\frac{N}{K}$, aleshores fent el canvi $n = n + \frac{lN}{K}$ on $l = 0, \dots, K-1$, clarament obtenim

$$S_f(m) = f(mK) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{K}-1} \sum_{l=0}^{K-1} a(n + \frac{lN}{K}) e^{\frac{2\pi i}{N/K} nm}.$$

per a $m = 0, \dots, \frac{N}{K} - 1$. Per tant $S_f(m) \leftrightarrow \sum_{l=0}^{K-1} a(n + \frac{lN}{K})$. El segon punt es demostra de la mateixa manera.

□

A més, si $a(n) = 0$ per a $\frac{N}{K} \leq n \leq N-1$, se satisfà que

$$f(m) = \sum_{l=0}^{\frac{N}{K}-1} S_f(l) G(m - lK),$$

on

$$G(m) = \begin{cases} 1, & \text{si } m \equiv 0 \pmod{N} \\ \frac{K}{N} \frac{1 - e^{\frac{2\pi im}{K}}}{1 - e^{\frac{2\pi im}{N}}}, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Així doncs es justifica el nom de Teorema del mostreig. Es pot trobar la demostració d'aquesta última igualtat en [4].

Capítol 2

El tor de les tonalitats

2.1 El tor com a superfície de revolució

Topològicament, un tor és una superfície tancada, orientable, de gènere 1, definida pel producte cartesià de dues circumferències $S^1 \times S^1$. El tor topològic pla es pot construir identificant els costats oposats d'un rectangle euclidià, descrit com un polígon fonamental $aba^{-1}b^{-1}$.

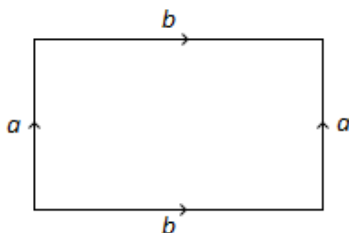


Figura 2.1: El tor topològic pla

Podem considerar una immersió del tor en \mathbb{R}^4 donada per

$$\begin{aligned} S^1 \times S^1 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (u, v) &\longmapsto (\cos(u), \sin(u), \cos(v), \sin(v)) \end{aligned}$$

amb la qual cosa

$$T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 = 1, z^2 + t^2 = 1\}.$$

Geomètricament, podem descriure el tor com una superfície de revolució de \mathbb{R}^3 que està generada per la rotació d'una circumferència C situada sobre el pla XZ , de radi $r > 0$ i centre $(R, 0, 0)$, amb $R \geq r$, al voltant de l'eix Z en l'espai de 3 dimensions.

Així doncs, R és la distància des del centre del tor fins al centre del tub, i r és el radi del tub. Siguin (x, y, z) les coordenades en un sistema cartesià de \mathbb{R}^3 . Aleshores, l'equació en coordenades cartesianes de la superfície del tor és:

$$(R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = r^2,$$

i les equacions paramètriques són

$$\begin{aligned}x(u, v) &= (R + r \cos(v)) \cos(u), \\y(u, v) &= (R + r \cos(v)) \sin(u), \\z(u, v) &= r \sin(v),\end{aligned}$$

amb $u, v \in (0, 2\pi]$.

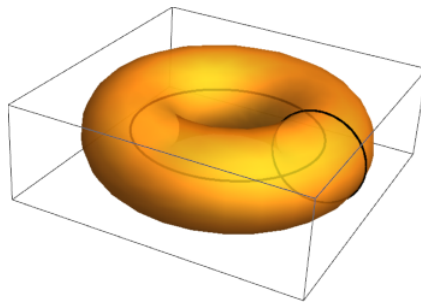


Figura 2.2: El tor de revolució de radis R i r

En tenir cura dels radis podem associar al tor de revolució de radis R i r el tor pla de costats $2\pi(R + r)$ i $2\pi r$, obtenint el rectangle de la Figura 2.3.

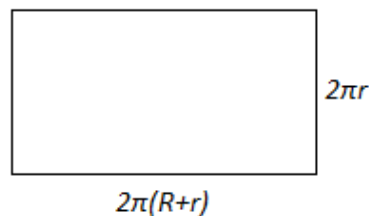


Figura 2.3: El tor pla

D'ara en endavant parlarem de *tor* quan fem referència al tor de revolució de radis R i r , i parlarem de *tor pla* quan fem referència al rectangle de costats $2\pi(R + r)$ i $2\pi r$. Observis, però, que aquests dos tors, representats en la Figura 2.2 i en la Figura 2.3 respectivament, no són isomètrics per qüestions de geometria diferencial (veure [5] i [8]). Tot i així, els meridians del tor són isomètrics als costats verticals del rectangle interpretats com a circumferències.

Un cop definides les superfícies sobre les que treballarem, cal parlar de les geodèsiques del tor pla i del tor, les quals són corbes que uneixen dos punts de la manera més curta possible. Sobre el tor pla queda clara la seva definició, ja que una geodèsica en \mathbb{R}^2 és el camí de distància més curta que hi ha entre dos punts del pla, és a dir el segment que uneix els dos punts.

D'altra banda, en superfícies de \mathbb{R}^3 , una corba és una geodèsica si la seva expressió en les coordenades (x^i) satisfà el següent sistema d'equacions diferencials de segon ordre¹:

$$\ddot{x}^i + \dot{x}^k \dot{x}^j \Gamma_{kj}^i, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Així doncs, cal calcular els símbols de Christoffel del tor per a obtenir l'expressió de les geodèsiques d'aquest. Un cop calculada la primera i segona forma fonamental de la superfície del tor de radis R i r , els símbols de Christoffel esdevenen els que veiem a continuació²:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^u & \Gamma_{uv}^u & \Gamma_{vv}^u \\ \Gamma_{uu}^v & \Gamma_{uv}^v & \Gamma_{vv}^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{r \sin(v)}{R+r \cos(v)} & 0 \\ \frac{(R+r \cos(v)) \sin(v)}{r} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i, per tant, aquests símbols donen lloc a les equacions diferencials de segon ordre següents

$$\begin{aligned} \ddot{u} + 2\Gamma_{uv}^u \dot{u} \dot{v} &= \ddot{u} - \frac{2R \sin(v)}{R+r \cos(v)} \dot{u} \dot{v} = 0, \\ \ddot{v} + \Gamma_{uu}^v \dot{u}^2 &= \ddot{v} + \frac{(R+r \cos(v)) \sin(v)}{r} \dot{u}^2 = 0. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Finalment, si integrem aquestes equacions diferencials obtenim les solucions

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{k}{(R+r \cos(v))^2}, \\ \dot{v} &= \pm \sqrt{-\frac{k^2}{r^2(R+r \cos(v))^2} + l}, \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

on k i l són constants.

Les equacions anteriors (2.1.2) són les solucions generals de les equacions de les geodèsiques del tor. Per a trobar realment les geodèsiques, cal trobar una parametrizació de la velocitat de la corba definida per \dot{u} i \dot{v} .

Tenim 5 tipus diferents de geodèsiques en el tor, que són:

- Els meridians.
- L'equador interior.
- L'equador exterior.
- Corbes que creuen ambdós equadors.
- Corbes que creuen l'equador exterior però no l'equador interior.

En aquest treball, però, ens centrarem només en els meridians del tor i en les geodèsiques del tor pla.

¹Vegis [5] per a la intuïció d'aquesta equació.

²Tots els càlculs es troben a [7]

2.2 Magnituds i fases

Els nombres complexos es poden descompondre en part real i part imaginària, però les coordenades cartesianes d'aquests no són rellevants, musicalment parlant. D'altra banda, els nombres complexos z estan descrits geomètricament per les seves coordenades polars: la magnitud i la fase (veure Figura 2.4). La magnitud indica el mòdul $|z|$ del nombre complex, i la fase n'indica l'angle, $\arg(z)$, de manera que es pot escriure z com

$$z = |z|e^{i\arg(z)},$$

i aquestes dues dimensions es representen de la manera que es veu a la imatge següent.

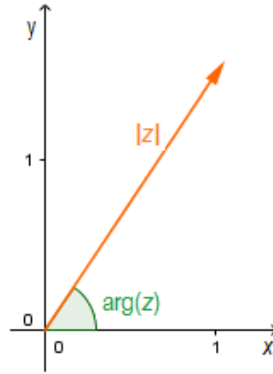


Figura 2.4: Magnitud i fase d'un nombre complex

En aquest capítol estudiarem l'existència, definició i ús de les fases i magnituds dels coeficients complexos de Fourier associats a un subconjunt de \mathcal{N} , on $\mathcal{N} = \{0, 1, \dots, N-1\}$ és el conjunt de representants de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Tot i que usarem $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ de forma general per a totes les definicions i teoremes, els exemples i les aplicacions seran per a $N = 12$, de manera que $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ serà el conjunt de totes les classes de notes musicals en el sistema temperat, format per 12 semitons. Si es creu convenient identificarem $\mathcal{N} = \{0, 1, 2, \dots, 11\}$ amb $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

Com que ens centrarem en estudiar canvis en la tonalitat, és a dir, modulacions, independentment de l'alçada o agudeses de les notes, considerarem sempre que \mathcal{N} és el conjunt de les 12 notes de la octava central d'un piano,

$$\mathcal{N} = \{Do3, Do\sharp3, Re3, Re\sharp3, Mi3, Fa3, Fa\sharp3, Sol3, Sol\sharp3, La3, La\sharp3, Si3\}.$$

Direm que un *acord* és un conjunt de notes $A \subseteq \mathcal{N}$, independentment del nombre d'elements que tingui. A més, un acord es caracteritza pel fet que sonen totes les notes a la vegada. Anomenarem *nota fonamental* de l'acord la nota que dóna nom a l'acord.

2.2.1 TFF d'un acord

Tot i que ja s'ha donat una definició per a la transformada finita de Fourier en el capítol anterior, en aquest usarem una altra amb una petita variació, ja que en qüestions d'acústica i digitalització del so s'utilitza aquesta. Varia simplement el fet de dividir per N . Al capítol anterior la transformada finita de Fourier d'una funció dividia totes les sumes per N i la seva transformada inversa no. A partir d'ara serà al revés; la transformada finita de Fourier d'una funció no dividirà per N però la seva inversa de Fourier sí.

Definició 2.2.1. *Sigui $A \subseteq \mathcal{N}$ un subconjunt de classes de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Es defineix la funció característica de A , $\chi_A : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, com*

$$\chi_A(m) = \begin{cases} 1, & \text{si } m \in A \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Per a fer referència a totes les funcions f tals que $f : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, usarem la notació $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, o bé simplement $\mathcal{F} = \mathcal{F}_N$.

Definició 2.2.2. *Sigui $\omega = e^{\frac{2\pi i}{N}}$ una arrel complexa d'ordre N de la unitat, per tant solució de l'equació $X^N - 1 = 0$. La transformada finita de Fourier de qualsevol funció $f \in \mathcal{F}$ és una altra funció de \mathcal{F} definida com*

$$a(n) = \widehat{f}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} f(m)\omega^{-nm}, \text{ per a } 0 \leq n \leq N-1,$$

on el valor de $a(n)$ és el n -èsim coeficient de Fourier de la funció f .

Com que el conjunt de totes les funcions de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ en \mathbb{C} , \mathcal{F} , és isomorf a \mathbb{C}^N , la transformació $f \mapsto a$ és un isomorfisme lineal del seu espai (\mathbb{C}^N) en la seva imatge, (\mathbb{C}^N) o l'espai de Fourier.

D'ara en endavant usarem la funció característica per a identificar els conjunts de notes, i calcularem els coeficients de Fourier de cada acord fent la transformada finita de Fourier de la seva funció característica. Així doncs, la definició de transformada de Fourier que farem servir en tots els exemples és la que veiem a continuació.

Definició 2.2.3. *Sigui A un subconjunt de \mathcal{N} , la transformada finita de Fourier de la funció característica de A , χ_A , és donada per*

$$a(n) = \widehat{\chi}_A(n) = \sum_{m \in A} \chi_A(m)\omega^{-nm}, \text{ per a } 0 \leq n \leq N-1.$$

Observació. Per a tots els conjunts de notes $A \subseteq \mathcal{N}$ tindrem que el seu 0-èsim coeficient de Fourier és igual al nombre de notes de l'acord.

Exemple. Com ja hem dit, el conjunt $\mathcal{N} = \{0, 1, \dots, 11\} = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ és el conjunt de representants de les 12 notes de la octava central del piano, de manera que a cada número li correspon una nota, com es veu a la Figura 2.5.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
do	do ♯	re	re ♯	mi	fa	fa ♯	sol	sol ♯	la	la ♯	si
si ♯	re ♭		mi ♭	fa ♭	mi ♯	sol ♭		la ♭		si ♭	do ♭

Figura 2.5: Notació per a les 12 notes de l'escala diatònica

Així doncs, si $A \subseteq \mathcal{N}$ és l'acord $A = \{do, mi, sol\} = \{0, 4, 7\}$, la seva funció característica és

$$\chi_A = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$$

i la seva transformada finita de Fourier és

$$a(n) = \sum_{m \in A} \chi_A(m) \omega^{-nm} = 1 + e^{-\frac{2\pi ni}{3}} + e^{-\frac{7\pi ni}{6}}, \text{ per a } 0 \leq n \leq 11.$$

Podem representar la TFF de l'acord A per

$$\widehat{\chi}_A = \left(3, \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i, 1, 2+i, -\sqrt{3}i, \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i, \right. \\ \left. 1, \frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}i, \sqrt{3}i, 2-i, 1, \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2}i \right).$$

Lema 2.2.1. *Per a qualsevol funció real f , hi ha una simetria entre els seus coeficients de Fourier. És a dir, per a tot $n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$,*

$$a(n) = \overline{a(N-n)},$$

on $\overline{a(n)}$ indica el conjugat de $a(n)$.

Així doncs, en el cas dels coeficients de Fourier d'un acord, es té que $a(1) = \overline{a(11)}$, $a(2) = \overline{a(10)}$, $a(3) = \overline{a(9)}$, $a(4) = \overline{a(8)}$ i $a(5) = \overline{a(7)}$.

Nota. Per comoditat a l'hora d'escriure, a partir d'ara i fins al final del capítol denotem els coeficients de Fourier com a_n en lloc de $a(n)$.

2.2.2 Magnitud dels coeficients de Fourier. Teorema de Lewin

La magnitud d'un coeficient de Fourier ens indica el mòdul d'aquest. L'objectiu en aquest apartat és estudiar la relació que hi ha entre les magnituds de diferents acords. Per a fer-ho, cal trobar la manera de descriure la quantitat de semitons que trobem entre diferents notes d'un subconjunt de \mathcal{N} .

Definició 2.2.4. *Sigui $A \subseteq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Definim $t(a, b) = a - b$, on a i b són elements del conjunt A . Cal tenir present que $t(a, b)$ no és una distància, ja que $t(a, b) \neq t(b, a)$, en general.*

Definició 2.2.5. *El vector intervàlic d'un subconjunt A de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ és un vector de N components que indiquen el nombre de vegades que apareix $t(a, b)$ en $A \times A$. És a dir, sigui VI_A aquest vector, aleshores*

$$VI_A(k) := \#\{(a, b) \in A \times A \mid t(a, b) = k\}.$$

En termes musicals $t(a, b)$ indica la quantitat de semitons que hi ha entre dues notes a i b del mateix acord A , i el vector intervàlic d'aquest acord té 12 components que indiquen el nombre de vegades que apareix cada quantitat de semitons en $A \times A$. Així doncs, el component k -èsim del vector fa referència al nombre de vegades que hem obtingut una quantitat k de semitons en el conjunt de notes A .

Exemple. Sigui $A = \{do, mi, sol\} = \{0, 4, 7\}$. Per a trobar el vector intervàlic cal fer totes les operacions $t(a, b) = a - b$ amb $a, b \in A$.

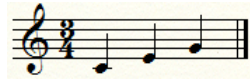


Figura 2.6: Notes do, mi i sol

Per tant, el vector intervàlic de l'acord A és $(3, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0)$.

Exemple. En aquest cas, tenim l'acord $B = \{mi, sol, do\} = \{4, 7, 0\}$, i es tracta d'un conjunt que té les mateixes notes que el de l'exemple anterior, però permutades. Les quantitats de semitons que obtenim en aquest cas són les mateixes que en l'anterior, i per tant el seu vector intervàlic és $(3, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0)$.

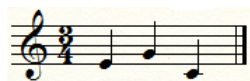


Figura 2.7: Notes mi, sol i do

En aquest últim exemple s'observa que tot i la permutació de les notes, s'obté el mateix vector intervàlic. Això dóna lloc a la proposició següent:

Proposició 2.2.1. *El vector intervàlic és invariant per permutació.* \square

Exemple. Considerem ara els acords $A = \{0, 2, 4, 5\} = \{do, re, mi, fa\}$ i $B = \{7, 9, 11, 0\} = \{sol, la, si, do\}$.



(a) Notes de A



(b) Notes de B

Figura 2.8: Les notes dels acords A i de B

En tots dos casos s'obté el mateix vector intervàlic, que és $(4, 1, 2, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 2, 1)$.

L'exemple anterior ens mostra com dos acords diferents poden tenir el mateix vector intervàlic. El fet de compartir vector intervàlic té relació amb les magnituds dels coeficients de Fourier de cada conjunt, tal i com veurem en el Teorema 2.2.1³. Prèviament a la seva demostració, cal definir un parell de conceptes.

Definició 2.2.6. *La funció intervàlica entre subconjunts $A, B \subseteq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ és una funció lineal $FI : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ definida com*

$$FI(A, B)(k) := \#\{(a, b) \in A \times B \mid t(a, b) = k\}.$$

Lema 2.2.2. *La funció intervàlica apareix immediatament com el producte de convolució de les funcions característiques de A i $-B$:*

$$FI(A, B)(k) = (\chi_A * \chi_{-B})(k).$$

Demostració.

Siguin A , B i $-B$ subconjunts de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, i χ_A, χ_B i χ_{-B} les seves funcions característiques. La funció característica del conjunt $-B$ satisfà que

$$\chi_{-B}(k) = \chi_B(-k) \text{ per a tot } k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z},$$

ja que si $B = (B_1, \dots, B_m)$, aleshores $-B = (N - B_1, \dots, N - B_m)$, amb $1 \leq m \leq N$. Així doncs, el producte de convolució de χ_A i χ_{-B} es pot definir també com

$$(\chi_A * \chi_{-B})(k) = \sum_{l \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \chi_A(l) \chi_B(l - k).$$

Fixat un valor de k , el producte $\chi_A(l) \chi_B(l - k)$ és igual a 1 si, i només si, $l \in A$ i $l - k \in B$. Per tant, si fem $t(l, l - k)$, obtenim que és igual a k . Això vol dir, doncs, que la suma de tots els productes $\chi_A(l) \chi_B(l - k)$ amb $l \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ que no són nuls ens dóna la quantitat de vegades que obtenim $t(a, b) = k$ amb $a, b \in A \times B$, és a dir

$$(\chi_A * \chi_{-B})(k) = FI(A, B)(k).$$

\square

³Demostració extreta i modificada de [2]

Així doncs, d'una banda tenim que $FI(A, A)(k) = (\chi_A * \chi_{-A})(k)$, i d'altra banda $FI(A, A)(k) = VI_A(k)$, per tant

$$\begin{aligned} FI(A, A)(k) &= VI_A(k) = (\chi_A * \chi_{-A})(k) \\ FI(B, B)(k) &= VI_B(k) = (\chi_B * \chi_{-B})(k). \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

A més, per les propietats del producte de convolució (Teorema 1.3.1), tenim que la transformada finita de Fourier del producte de convolució de dues funcions és igual al producte de les transformades finites de Fourier de cada funció. Notem $\widehat{\chi}_D$ la transformada finita de Fourier del conjunt $D \subseteq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Aleshores,

$$\begin{aligned} \widehat{(\chi_A * \chi_{-A})} &= \widehat{\chi}_A \widehat{\chi}_{-A} \\ \widehat{(\chi_B * \chi_{-B})} &= \widehat{\chi}_B \widehat{\chi}_{-B}. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Teorema 2.2.1 (Teorema de Lewin). *Dos subconjunts de notes A i B comparteixen la magnitud dels seus coeficients de Fourier si, i només si, tenen el mateix vector intervàlic.*

Demostració.

Siguin A i B dos acords de \mathcal{N} i χ_A i χ_B les seves funcions característiques. Siguin VI_A i VI_B els vectors intervàlics de A i B . Notem amb el símbol $\widehat{}$ les transformades finites de Fourier de totes les funcions. Volem demostrar que $|\widehat{\chi}_A(k)| = |\widehat{\chi}_B(k)| \iff VI_A = VI_B$. Usant les equacions (2.1.1) i (2.1.2) tenim les relacions següents:

$$\begin{aligned} VI_A = VI_B &\iff \widehat{VI}_A = \widehat{VI}_B \\ &\iff \widehat{(\chi_A * \chi_{-A})} = \widehat{(\chi_B * \chi_{-B})} \\ &\iff \widehat{\chi}_A \widehat{\chi}_{-A} = \widehat{\chi}_B \widehat{\chi}_{-B} \\ &\iff \widehat{\chi}_A \overline{\widehat{\chi}_A} = \widehat{\chi}_B \overline{\widehat{\chi}_B} \\ &\iff |\widehat{\chi}_A(k)|^2 = |\widehat{\chi}_B(k)|^2 \text{ per a tot } k \\ &\iff |\widehat{\chi}_A(k)| = |\widehat{\chi}_B(k)| \text{ per a tot } k. \end{aligned}$$

on $\overline{F(\chi_A)}$ i $\overline{F(\chi_B)}$ indiquen els conjugats complexos de $F(\chi_A)$ i $F(\chi_B)$, respectivament.

□

Definició 2.2.7. Definim un acord tríada de mode Major de fonamental la nota a , al qual anomenarem acord de a Major, o bé a M , un conjunt de 3 notes $a, b, c \in \mathcal{N}$ tals que $t(a, b) = 4$ i $t(a, c) = 7$. Així doncs, $t(b, c) = 3$.

Definició 2.2.8. Definim un acord tríada de mode menor de fonamental la nota a , al qual anomenarem acord de a menor, o bé a m , un conjunt de 3 notes $a, b, c \in \mathcal{N}$ tals que $t(a, b) = 3$ i $t(a, c) = 7$. Així doncs, $t(b, c) = 4$.



Figura 2.9: Exemples d'acord Major i d'acord menor

Corol·lari 2.2.1. Els acords Majors i menors satisfan el teorema de Lewin, i les magnituds dels seus coeficients de Fourier són els que es veuen a la Figura 2.10 ⁴.

$ a_0 $	$ a_1 $	$ a_2 $	$ a_3 $	$ a_4 $	$ a_5 $	$ a_6 $	$ a_7 $	$ a_8 $	$ a_9 $	$ a_{10} $	$ a_{11} $
3	$\sqrt{2-\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{5}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2+\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{2+\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	1	$\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Figura 2.10: Magnitud dels acords Majors i dels acords menors

2.2.3 Fase dels coeficients de Fourier

La fase d'un coeficient complex de Fourier $z = a + bi$ ens indica l'angle que forma aquest respecte de l'eix de les abscisses tal i com s'indica a la Figura 2.4, i es calcula fent $\arg(z) = \arctan(\frac{b}{a})$. Els lemes a continuació determinen amb precisió l'efecte de les operacions de translació i inversió:

Lema 2.2.3. La translació d'un acord A per t semitons rota el k -èsim coeficient de Fourier a_k de manera que l'angle del nou acord $A + t$ és $\arg(a_k) - \frac{2kt\pi}{N}$. La inversió d'un acord A rota les conjugacions dels coeficients de Fourier de manera que l'angle del nou acord $-A$ és $-\arg(a_k)$.

Demostració.

Sigui A un acord de \mathcal{N} , χ_A la seva funció característica i a_n els seus coeficients de Fourier. Sigui $B = A + t$ la translació per t semitons de l'acord A , amb funció característica χ_B . Els seus coeficients de Fourier, b_n , són de la forma següent:

$$b_k = \sum_{m \in B} \chi_B(m) e^{\frac{-2km\pi i}{N}} = \sum_{m \in B} e^{\frac{-2km\pi i}{N}} = \sum_{m-t \in A} e^{\frac{-2(m-t)k\pi i}{N}} e^{\frac{-2kt\pi i}{N}} = a_k e^{\frac{-2kt\pi i}{N}}.$$

⁴Imatge extreta i modificada de [1]

Ara, sigui $C = -A$ la inversió de A , amb funció característica χ_C . Els seus coeficients de Fourier, c_k , tenen la forma següent:

$$c_k = \sum_{m \in C} e^{\frac{-2mk\pi i}{N}} = \sum_{m \in A} e^{\frac{2mk\pi i}{N}} = \bar{a}_k.$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \arg(b_k) &= \arg(a_k) - \frac{2tk\pi}{N}, \\ \arg(c_k) &= -\arg(a_k). \end{aligned}$$

□

Exemple. Suposem que cada una de les 12 notes de l'escala diatònica defineix un acord, obtenint així un total de 12 acords d'un element cadascun. Pel Teorema 2.1.1, les magnituds dels coeficients de Fourier d'aquests acords són iguals. En particular es té $|a_k| = 1$ per a tot k . Això implica que tots els coeficients de Fourier es mouen en la mateixa circumferència de radi 1.

A la Figura 2.11⁵ observem com varien les fases del coeficient de Fourier a_5 per a cada nota.













scale	C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B
$\theta_5 = \arg(a_5)$	0	$-5\pi/6$	$\pi/3$	$-\pi/2$	$2\pi/3$	$-\pi/6$	π	$\pi/6$	$-2\pi/3$	$\pi/2$	$-\pi/3$	$5\pi/6$
$e^{i\theta_5}$												

Figura 2.11: Rotació del coeficient a_5 per a les 12 notes de l'escala diatònica

Aquests coeficients roten un angle de $\frac{-5\pi}{6}$ cada vegada que fem una translació per un semitò. En altres paraules, la translació d'un acord per t semitons, en l'espai de les particions de conjunts de notes, correspon a una rotació complexa en l'espai de Fourier, essent cada coeficient de Fourier multiplicat per alguna arrel de la unitat de l'equació $X^N - 1 = 0$.

Segons el que suggereixen les diferents propietats de la magnitud i la fase dels coeficients de Fourier, la magnitud de a_k , $|a_k|$, ens dóna informació sobre la forma o estructura d'un conjunt de notes i sobre les seves possibilitats melòdiques, mentre que la fase, $\arg(a_k)$, ens informa sobre l'harmonia i determina amb precisió les diferents qualitats musicals d'un conjunt de notes.

⁵Imatge extreta i modificada de [1]

2.3 Representació d'acords tríades en el tor

2.3.1 Els acords Majors i els acords menors

L'objectiu en aquest apartat és trobar la manera de discriminar cada un dels acords Majors i menors a partir dels seus coeficients de Fourier per a poder-ne obtenir unes coordenades. A més, cal definir l'espai on els representarem, el qual veurem que es tracta d'un tor.

Pel Teorema 2.2.1 se sap que els acords Majors i menors comparteixen la magnitud de tots els seus coeficients de Fourier, i només les fases són diferents. A la Figura 2.10 observem el valor d'aquestes magnituds. S'observen dues coses:

- Excepte pel coeficient a_0 , les magnituds es poden llegir del dret i del revés. És a dir, $|a_1| = |a_{11}|$, $|a_2| = |a_{10}|$, $|a_3| = |a_9|$ etc. Això és una conseqüència del Lema 2.2.1.
- Els coeficients a_3 i a_5 tenen les magnituds més grans, respectivament, seguits de l' a_4 .

Com que els coeficients de Fourier dels diferents acords es mouen en diferents espais a mesura que es fan les translacions, és difícil visualitzar el seu moviment en l'espai de Fourier. Per tant, cal seleccionar una regió d'aquest espai on es puguin trobar i observar tots els acords. Si considerem els coeficients a_0, \dots, a_{11} com a coordenades en \mathbb{C}^{12} tots els acords Majors i menors satisfan les equacions següents:

$$|a_0| = 3, |a_1| = \sqrt{2 - \sqrt{3}}, \dots, |a_{10}| = 1, |a_{11}| = \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Com que la condició $|z| = r$ defineix una circumferència de radi r en \mathbb{C} , aquest conjunt d'equacions defineixen un producte de circumferències, que formen un tor en \mathbb{C}^{12} .

Tenint en compte el primer dels comentaris anteriors, no tindrem en consideració els coeficients a_0 i de l' a_7 a l' a_{11} per ser redundants. Així doncs, l'espai que queda és un tor de 6 dimensions definit per les magnituds dels coeficients a_1 a a_6 . Tot i haver reduït l'espai, encara és difícil visualitzar una superfície sobre \mathbb{C}^6 . Aquí és quan entren en joc les fases dels coeficients de Fourier.

	$\arg(a_1)$	$\arg(a_2)$	$\arg(a_3)$	$\arg(a_4)$	$\arg(a_5)$	$\arg(a_6)$
<i>do m</i>	-1.309	-1.047	1.107	-0.524	-0.262	3.1416
<i>Do M</i>	-2.356	0	0.464	-1.571	0.785	0
<i>reb m</i>	-1.833	-2.094	-0.464	-2.618	-2.88	0
<i>Reb M</i>	-2.88	-1.047	-1.107	2.618	-1.833	3.1416
<i>re m</i>	-2.356	3.1416	-2.034	1.571	0.785	3.1416
<i>Re M</i>	2.88	-2.094	-2.678	0.524	1.833	0
<i>mib m</i>	-2.88	2.094	2.678	-0.524	-1.833	0
<i>Mib M</i>	2.356	3.1416	2.034	-1.571	-0.785	3.1416
<i>mi m</i>	2.88	1.047	1.107	-2.618	1.833	3.1416
<i>Mi M</i>	1.833	2.094	0.464	2.618	2.88	0
<i>fa m</i>	2.356	0	-0.464	1.571	-0.785	0
<i>Fa M</i>	1.309	1.047	-1.107	0.524	0.262	3.1416
<i>fa# m</i>	1.833	-1.047	-2.034	-0.524	2.88	3.1416
<i>Fa# M</i>	0.785	0	-2.678	-1.571	-2.356	0
<i>sol m</i>	1.309	-2.094	2.678	-2.618	0.262	0
<i>Sol M</i>	0.262	-1.047	2.034	2.618	1.309	3.1416
<i>lab m</i>	0.785	3.1416	1.107	1.571	-2.356	3.1416
<i>Lab M</i>	-0.262	-2.094	0.464	0.524	-1.309	0
<i>la m</i>	0.262	2.094	-0.464	-0.524	1.309	0
<i>La M</i>	-0.785	3.1416	-1.107	-1.571	2.356	3.1416
<i>sib m</i>	-0.262	1.047	-2.034	-2.618	-1.309	3.1416
<i>Sib M</i>	-1.309	2.094	-2.678	2.618	-0.262	0
<i>si m</i>	-0.785	0	2.678	1.571	2.356	0
<i>Si M</i>	-1.833	1.047	2.034	0.524	-2.88	3.1416

Figura 2.12: Fases dels coeficients de Fourier dels acords Majors i menors

A la taula de la Figura 2.12 trobem els diferents valors de les fases per a cada coeficient de Fourier de cada acord des de l' a_1 fins l' a_6 . D'aquesta taula s'observa el següent:

- Una sola fase no permet discriminar entre els 24 acords, ja que en totes les fases es repeteix algun valor.
- Excepte per $\arg(a_3)$, tots els angles són fraccions de π .
- $\arg(a_6)$ només pren dos valors en funció del nombre de “notes senars” (és a dir, posicions senars) que té l'acord.

De totes les parelles de fases possibles que es poden escollir, seleccionant les dels coeficients a_3 i a_5 s'aconsegueix discriminar tots els acords. També s'aconsegueix amb altres parelles, però aquesta opció és la més adequada, ja que els coeficients a_3 i a_5 es diferencien dels altres per tenir les magnituds més grans i, a més, són els coeficients que indiquen els harmònics més importants d'un acord. Així doncs, definirem les coordenades dels acords Majors i menors a partir del parell de fases $\arg(a_3)$ i $\arg(a_5)$ (veure Figura 2.13).

	$\arg(a_3)$	$\arg(a_5)$		$\arg(a_3)$	$\arg(a_5)$
<i>Do M</i>	0.464	0.785	<i>do m</i>	1.107	-0.262
<i>Reb M</i>	-1.107	-1.833	<i>reb m</i>	-0.464	-2.88
<i>Re M</i>	-2.678	1.833	<i>re m</i>	-2.034	0.785
<i>Mib M</i>	2.034	-0.785	<i>mib m</i>	2.678	-1.833
<i>Mi M</i>	0.464	2.88	<i>mi m</i>	1.107	1.833
<i>Fa M</i>	-1.107	0.262	<i>fa m</i>	-0.464	-0.785
<i>Fa# M</i>	-2.678	-2.356	<i>fa# m</i>	-2.034	2.88
<i>Sol M</i>	2.034	1.309	<i>sol m</i>	2.678	0.262
<i>Lab M</i>	0.464	-1.309	<i>lab m</i>	1.107	-2.356
<i>La M</i>	-1.107	2.356	<i>la m</i>	-0.464	1.309
<i>Sib M</i>	-2.678	-0.262	<i>sib m</i>	-2.034	-1.309
<i>Si M</i>	2.034	-2.88	<i>si m</i>	2.678	2.356

Figura 2.13: Fases discriminatòries dels acords Majors i menors

Definició 2.3.1. *El tor de les tonalitats Majors i menors és el tor definit en \mathbb{C}^2 per les equacions*

$$|a_3| = \sqrt{5} \sim 2.236 \text{ i } |a_5| = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \sim 1.932,$$

i parametritzat pel parell de fases $\arg(a_3)$ i $\arg(a_5)$. És a dir, que el tor tindrà radis $R = |a_3| \sim 2.236$ i $r = |a_5| \sim 1.932$.

Així doncs, donats els radis R i r de la definició anterior, el tor pla de les tonalitats Majors i menors és un rectangle de dimensions $2\pi(R + r) \times 2\pi r$. Per tant, les coordenades dels acords Majors i menors sobre el tor pla tenen la forma $((R+r)\arg(a_3), r\arg(a_5))$, i es representen de la manera que es veu a la Figura 2.14.

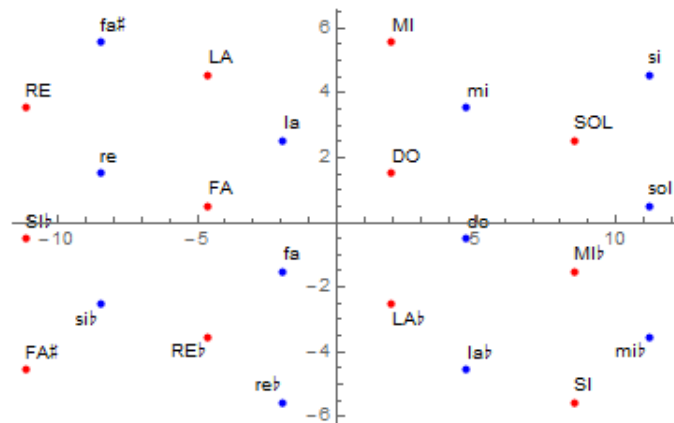


Figura 2.14: Acords Majors i menors en el tor pla

2.3.2 Els acords disminuïts

De la mateixa manera que els acords Majors i menors, les coordenades dels acords disminuïts es defineixen a partir de les fases dels coeficients de Fourier a_3 i a_5 , les quals podem veure a continuació:

	$\arg(a_3)$	$\arg(a_5)$
<i>do dim</i>	1.5708	-1.5708
<i>reb dim</i>	0	2.0944
<i>re dim</i>	-1.5708	-0.5236
<i>mib dim</i>	3.1416	3.1416
<i>mi dim</i>	1.5708	0.5236
<i>fa dim</i>	0	-2.0944
<i>fa# dim</i>	-1.5708	1.5708
<i>sol dim</i>	3.1416	-1.0472
<i>lab dim</i>	1.5708	2.618
<i>la dim</i>	0	0
<i>sib dim</i>	-1.5708	-2.618
<i>si dim</i>	3.1416	1.0472

Figura 2.16: Fases dels coeficients de Fourier dels acords disminuïts

Els acords disminuïts no tenen la mateixa forma que els acords Majors i els acords menors. Sigui $t(a, b) = a - b$ la quantitat de semitons que hi ha entre les notes a i b de l'acord A , definim els acords disminuïts i els “modes disminuïts” de la manera següent:

Definició 2.3.2. *Definim un acord tríada de mode disminuït de fonamental la nota a , al qual anomenarem acord de a disminuït, o bé a dim, un conjunt de 3 notes $(a, b, c) \subset \mathcal{N}$ tals que $t(a, b) = 3$ i $t(a, c) = 6$. Així doncs, $t(b, c) = 3$.*

Per tant, el vector intervàlic dels acords disminuïts és diferent que el dels acords Majors i menors, i això implica que les magnituds dels coeficients de Fourier a_3 i a_5 dels acords disminuïts són diferents. Ara aquestes magnituds són $|a_3| = |a_5| = 1$. Així doncs, els acords disminuïts defineixen el seu propi tor.

Definició 2.3.3. *El tor disminuït és el tor definit en \mathbb{C}^2 per les equacions*

$$|a_3| = 1 \text{ i } |a_5| = 1,$$

i parametrizat pel parell de fases $(\arg(a_3), \arg(a_5))$. És a dir, que tindrà radi $R^- = r^- = 1$. Es tracta d'un tor tangent a ell mateix en el punt $(0, 0, 0)$.

Les coordenades dels acords disminuïts sobre el tor pla disminuït seran, doncs, de la forma $(2 \arg(a_3), \arg(a_5))$, i la representació dels acords sobre aquest es veu a la Figura 2.17 (a).

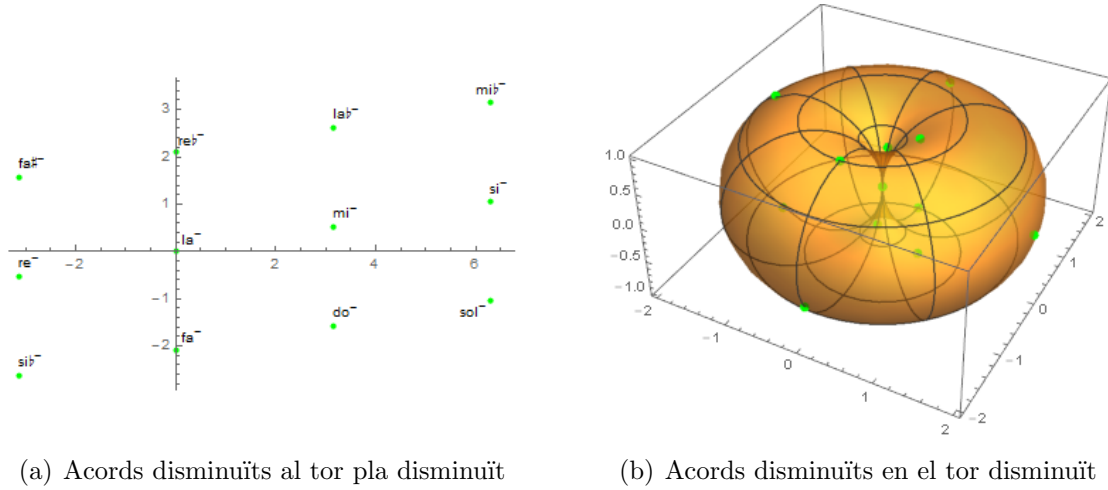


Figura 2.17: El tor definit pels acords disminuïts

Musicalment té sentit que el tor disminuït sigui de dimensions més petites, ja que aquest tipus d'acord té una quantitat de semitons inferior respecte dels Majors i dels acords menors. A la Figura 2.18 observem la disposició d'ambdós tors.

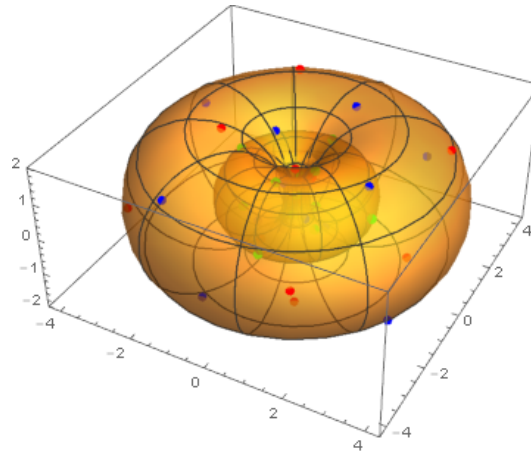


Figura 2.18: El tor de les tonalitats Majors i menors i el tor disminuït

De cara a poder calcular distàncies entre acords en el capítol següent, ens interessa representar els acords disminuïts en el tor pla i en el tor de les tonalitats Majors i menors. Per tant, farem una projecció dels punts del tor disminuït al tor de les tonalitats Majors i menors, de manera que obtenim el que es veu a la Figura 2.19.

Al tor de radis R i r on trobem la representació dels acords Majors, menors i disminuïts, l'anomenarem *Tor de les tonalitats*, i al rectangle de dimensions $2\pi(R+r) \times 2\pi r$ l'anomenarem *Tor pla de les tonalitats*.

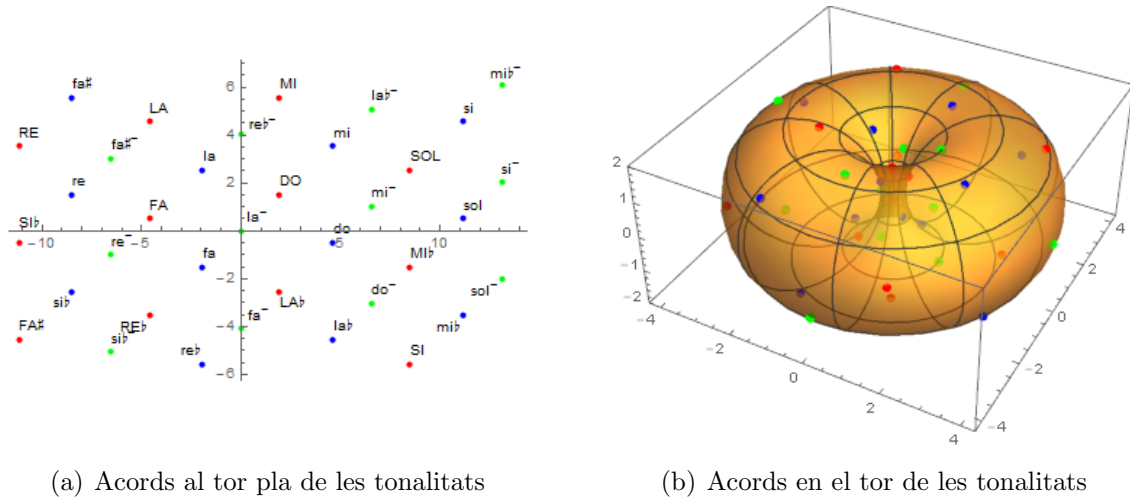


Figura 2.19: Representació dels acords Majors, menors i disminuïts

Al llarg de tot el treball representarem els acords disminuïts com a punts de color verd, i els notarem amb lletra minúscula i el signe “-”, tal i com s’observa a la Figura 2.19 (a). De la representació dels acords sobre el tor pla de les tonalitats, observem el següent:

- Els acords disminuïts s’agrupen de tres en tres sobre diferents línies verticals, igual que passa amb els acords Majors i menors. A més, estan situats entre una línia vertical de mode Major i una de mode menor. Això últim dóna a entendre que la projecció dels acords disminuïts sobre el tor de les tonalitats faci d’aquest tipus d’acord un acord pont (de pas) entre els modes Major i menor.
- Observem com les línies verticals s’agrupen de 3 en 3 (una per cada mode) en funció dels acords que hi pertanyen. Per exemple, en un dels grups hi trobem tres línies verticals que contenen els acords de Re, de Sib i de Fa \sharp en el mode Major, menor i disminuït, en aquest ordre.
- Igual que passava entre acords Majors i menors, llegint els acords disminuïts verticalment, fixant-nos només amb la nota fonamental de l’acord, apareixen els 4 acords Augmentats Sib Aug, Re \flat Aug, La \flat Aug i Mi \flat Aug.

A simple vista sembla que hi ha punts en el tor que són més propers que altres, i això és el que estudiem en el capítol següent.

Capítol 3

Modulacions musicals sobre el tor

3.1 Distància entre dos acords

De cara a analitzar amb més profunditat la situació dels acords i la proximitat entre ells, és necessari introduir una distància en el model del tor i apreciar el seu significat musical. Tot i que el tor pla i el tor no són isomètrics, definirem una distància sobre el tor pla de manera que es conservin els punts propers en el tor.

Sobre un rectangle de \mathbb{R}^2 es pot considerar qualsevol distància estàndard entre parells de coordenades reals, com per exemple la distància euclídea. Aquesta, però, no conserva els punts propers d'un tor a l'altre, i per tant l'haurem de modificar per tal que sí ho faci.

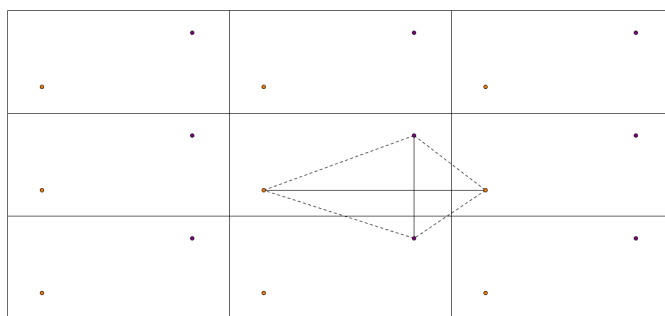


Figura 3.1: Xarxa de torsi plans

Considerem la xarxa de la Figura 3.1. El rectangle del centre correspon al tor pla de les tonalitats, de base $L = 2\pi(R + r)$ i altura $l = 2\pi r$, i la resta de rectangles són translacions d'aquest tor en el pla. Les línies discontinües de la imatge anterior fan referència a la distància entre dos punts. Com es pot observar, la distància euclidiana entre dos punts del tor pla correspon a la línia discontinua més llarga que uneix els dos punts. En canvi, si considerem una de les translacions del rectangle observem com la línia discontinua que uneix un punt del tor pla i l'altre punt situat en la translació d'aquest tor és més petita.

De cara a conservar els punts propers en el tor, considerarem la distància entre dos acords com la distància més petita entre la distància euclídea en el tor pla i la distància euclidiana d'un punt del tor pla a un punt del tor pla traslladat. Així doncs, la definició general de la distància en el tor pla és la que hi ha a continuació.

Definició 3.1.1. *Siguin $P = (p_1, p_2)$ i $Q = (q_1, q_2)$ les coordenades de dos acords en el tor pla de les tonalitats, i siguin L i l la base i l'altura d'aquest, respectivament. Definim la distància entre els punts P i Q de la manera següent:*

$$d(P, Q) = \text{Min}\left\{\sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}, \sqrt{(\text{Min}\{|p_1 - q_1|, L - |p_1 - q_1|\})^2 + (\text{Min}\{|p_2 - q_2|, l - |p_2 - q_2|\})^2}\right\}.$$

3.2 Representació gràfica de les modulacions

A continuació veurem quins són els valors més petits que pot prendre la distància, i estudiarem quants d'aquests valors necessitem per a recórrer el tor passant per tots els acords. El fet de canviar d'una tonalitat a una altra és el que musicalment s'anomena una *modulació*. Les visualitzarem a partir del que anomenarem *camins*, que representarem com a arestes d'un *graf tonal*.

3.2.1 Cicles modals

Comencem calculant les distàncies entre acords del mateix mode. El que s'observa és que el valor que pren la distància entre dos acords x i y Majors, és el mateix valor que pren la distància entre els acords x i y del mode menor i del mode disminuït. A més, la distància més petita entre dos acords del mateix mode és de 4.046, i és la distància que hi ha entre un acord i els altres dos que pertanyen a la mateixa línia vertical del tor pla (Figura 2.19 (a)) de la qual parlàvem al capítol anterior. A continuació hi tenim els grafs que es formen usant aquesta distància:

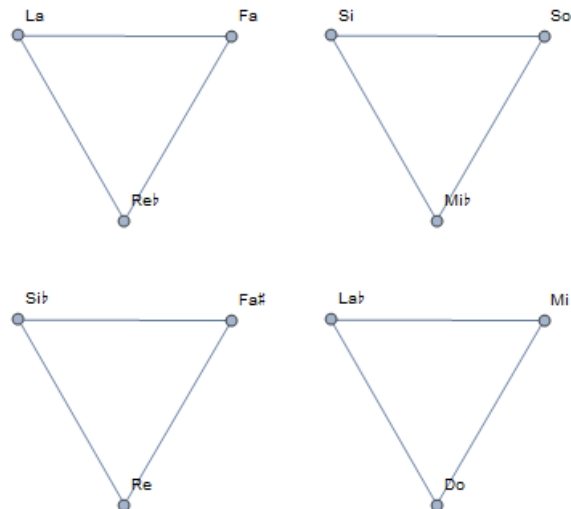


Figura 3.2: Cicles monomodals

Com podem veure a la Figura 3.2, es formen 4 cicles de 3 vèrtexs (acords tríades o tonalitats) i 3 arestes o camins (modulacions). A aquests cicles els anomenarem *cicles monomodals* per ser modulacions dins del mateix mode. El que s'observa és que a partir d'un dels cicles podem obtenir els altres, fent translacions per t semitons en cada acord. Per exemple, fent una translació per 2 semitons del cicle Do-Mi-Lab s'obté el cicle Re-Fa \sharp -Si \flat . Així doncs, musicalment parlant, es tracta d'un transport: aquests 4 cicles sonen de la mateixa manera, però d'una forma més aguda o més greu en funció de la nota inicial.

En música, les modulacions es donen entre modes Majors i modes menors, essent els acords disminuïts simplement *acords de pas* entre un mode i un altre. Si estudiem les distàncies entre acords Majors i acords menors, sense intervenir els acords disminuïts, tenim que el valor més petit que pren és 3.359, i es dona sempre entre un acord Major i un de menor. Usant aquest valor, obtenim les modulacions de la Figura 3.3.

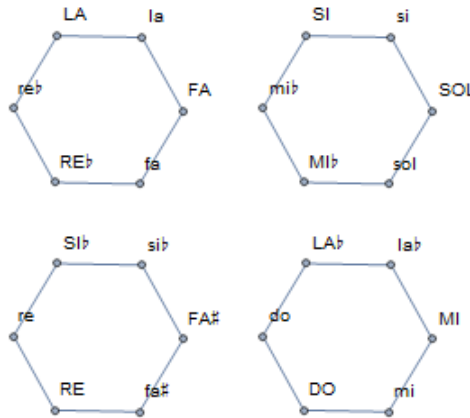


Figura 3.3: Cicles bimodals

Fent aquest tipus de modulació obtenim altre vegada 4 cicles, aquest cop de 6 vèrtexs i 6 arestes, els quals anomenarem *cicles bimodals* per ser cicles que van variant de mode Major a mode menor. Igual que passa amb els cicles monomodals, també podem obtenir qualsevol cicle per l'acció d'un transport a partir de fer una translació per t semitons d'un altre cicle, de manera que també sonen igual però a diferent alçada. Si ens fixem amb el tor pla de les tonalitats de la Figura 2.14, observem com cada camí del graf passa per 6 acords situats en dues línies verticals properes.

Els cicles monomodals i bimodals es caracteritzen pel fet que totes les arestes tenen el mateix pes, ja que hem usat una única distància per a definir aquests tipus de graf. És per això que en tots dos casos, les modulacions d'un acord a un altre del mateix cicle sonen semblants; es fan les mateixes translacions d'un acord a un altre, però sonen més agudes o més greus en funció del camí escollit.

3.2.2 El graf hamiltonià de les tríades

En aquest apartat introduïm els acords disminuïts, els quals tenen un comportament especial. Si calculem les distàncies entre els acords Majors i menors i els acords disminuïts, obtenim que el valor més petit és 2.456. Usant únicament aquest valor obtenim grafs com el que veiem a Figura 3.4, on el vèrtex del centre és un acord disminuït, i els altre dos vèrtex són un acord Major i l'altre menor.



Figura 3.4: Graf de pes 1 o de pes 2

Així doncs, es verifica que la funció de l'acord disminuït és fer d'acord de pas entre un del mode Major i un del mode menor. Tot i així, només amb aquest valor, 2.456, que anomenarem *Pes 1*, no aconseguim passar per tots els acords. Ara, usant únicament el segon valor més petit que pren la distància entre acords Majors i menors i acords disminuïts, 3.182, el qual anomenem *Pes 2*, obtenim el mateix que es veu a la Figura 3.4.

En canvi, usant els dos pesos, *Pes 1* i *Pes 2*, per a crear modulacions entre acords, obtenim el que es veu a la Figura 3.5.

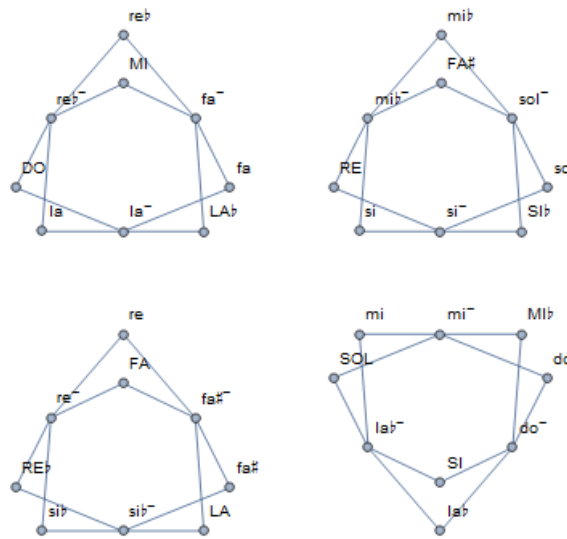


Figura 3.5: Grafs de pesos 1 i 2

Com podem observar, obtenim 4 grafs diferents, de 9 vèrtexs i 12 arestes. En tots ells es veu com l'acord disminuït actua com a acord de pas entre acords del mateix mode (Major o menor) i entre acords de diferent mode. Observem també com en cada un dels grafs, els acords menors i disminuïts tenen les mateixes notes fonamentals, i els Majors en tenen unes altres. Així doncs, els acords disminuïts són els que pertanyen a les línies verticals de la Figura 2.19 (a) que fan de pont entre acords Majors i menors de diferents notes fonamentals.

Com que usant els pesos 1 i 2 no aconseguim recórrer tot el tor, introduïm el tercer valor més petit que pren la distància, al qual anomenarem *pes 3*. Aquest valor resulta ser la distància més petita entre acords Majors i menors, 3.359, usada anterior per als tipus de modulació que indiquen els cicles bimodals. A continuació observem els camins que es formen d'usar la parella de pesos 1 i 3 (a l'esquerra) i la parella de pesos 2 i 3 (a la dreta).

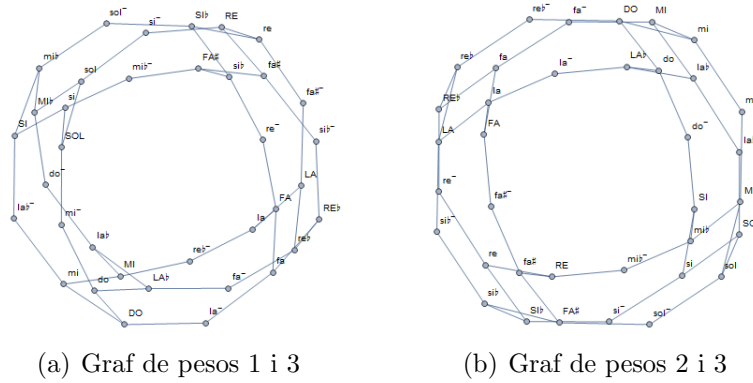


Figura 3.6: Grafs hamiltonians usant dos pesos

Els dos grafs anteriors són grafs hamiltonians que contenen els 12 acords Majors, els 12 acords menors i els 12 acords disminuïts. De tots dos se'n pot extreure un camí hamiltonià, de manera que usant només un parell de valors per la distància aconseguim recórrer tot el tor passant per tots els acords. Al tipus de modulació que s'obté a partir d'un graf hamiltonià l'anomenarem *modulació hamiltoniana*.

Tot i haver aconseguit recórrer el tor passant per tots els acords usant únicament els pesos 1 o 2 i el pes 3, hi ha una qüestió de limitació melòdica. Per tant, crec convenient considerar un altre tipus de modulació obtinguda a partir dels tres pesos 1, 2 i 3 definits anteriorment. Tal i com es veu a la Figura 3.7, aquest tipus de modulació es representa en graf hamiltonià, al qual he batejat com *Graf hamiltonià de les tríades*.

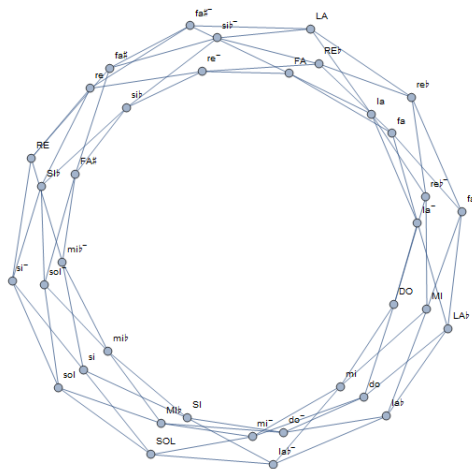


Figura 3.7: Graf hamiltonià de les tríades

3.3 Meridians tonals

Tal com hem dit anteriorment, els camins que es formen entre acords del mateix mode, representats en la Figura 3.2 com a cicles monomodals, pertanyen a la mateixa línia vertical del tor pla de les tonalitats (Figura 2.19). Les línies verticals del tor pla corresponen als meridians del tor, i per tant els tres acords que pertanyen a la mateixa línia vertical es troben sobre el mateix meridià en el tor, al qual anomenarem *meridià tonal*.

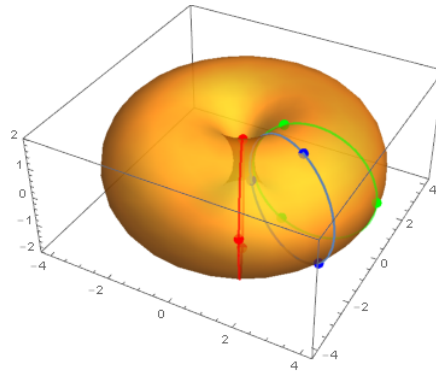


Figura 3.8: Cicles monomodals al tor

A aquests meridians els anomenarem *meridià Major, menor o disminuït* en funció del mode dels acords que hi pertanyen. A la Figura 3.8 veiem representats els acords $\text{Re}\flat$, Fa i La de diferents modes sobre el meridià Major (vermell), menor (blau) i disminuït (verd). S'observa com el meridià menor és més proper al meridià disminuït que al meridià Major. Aquest fet té molt de sentit ja que, com hem comentat a la Figura 3.5, el meridià disminuït actua com a meridià de pas entre els 3 acords menors de fonamental les notes a_1, a_2, a_3 i els 3 acords que es troben al meridià Major següent, de fonamentals tres notes diferents, b_1, b_2, b_3 .

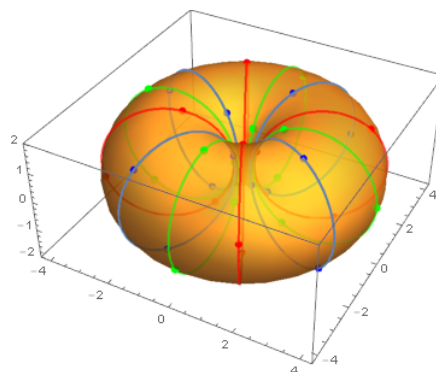


Figura 3.9: Meridians tonals

A la Figura 3.9 veiem els 12 els meridians tonals, corresponent als 12 cicles mono-modals diferents; 4 Majors, 4 menors i 4 disminuïts. Les modulacions representades en la Figura 3.5, a la Figura 3.6 i a la Figura 3.7 s'obtenen de fer salts d'un meridià tonal a un altre, usant els acords disminuïts com a acords de pas entre alguns acords Majors i menors.

Finalment, representem els meridians Majors i menors de cara a estudiar els cicles bimodals de la Figura 3.3. Tal i com s'observa a la Figura 3.10, els meridians Majors i menors s'agrupen de dos en dos. És a dir que no hi ha la mateixa distància d'un meridià menor als dos meridians Majors més propers. Això s'observava clarament en les línies verticals de les quals parlàvem en en la Figura 2.14. A més, s'observa com els tres acords de cada parella de meridians propers comparteixen la mateixa nota fonamental.

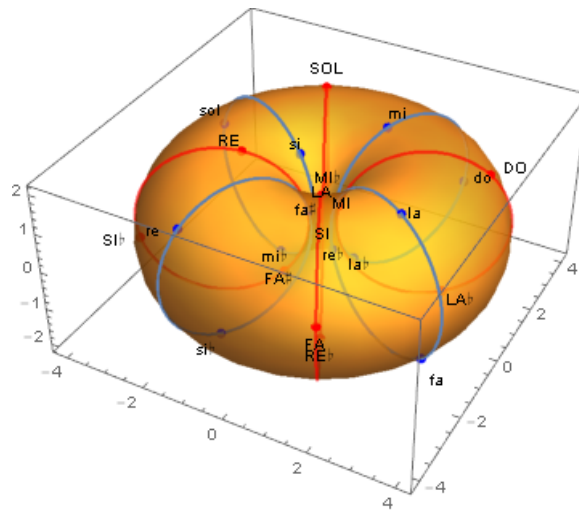


Figura 3.10: Meridians tonals Majors i menors

Així doncs, la modulació representada com a cicles bimodals funciona de la manera següent: fixat un acord inicial, independentment de si és Majors o menor, busquem en el meridià tonal proper l'acord de mateixa nota fonamental però de diferent mode. A continuació, saltem a un acord del meridià del que hem sortit al principi, i repetim el procés fins que tornem a l'acord inicial, tancant així el cicle, i havent passat per 6 acords diferents.

3.3.1 Els acords augmentats

Fins aquí ens hem centrat únicament en els acords Majors, menors i disminuïts, i és que els acords Augmentats presenten moltes diferències respecte dels altres acords, començant per la seva definició. Sigui $t(a, b) = a - b$ la quantitat de semitons que hi ha entre dues notes a i b de l'acord A .

Definició 3.3.1. *Definim un acord tríada de mode Augmentat de fonamental la nota a , al qual anomenarem acord de a Augmentat, o bé a Aug, un conjunt de 3 notes $(a, b, c) \subset \mathcal{N}$ tals que $t(a, b) = 4$ i $t(a, c) = 8$. Així doncs, $t(b, c) = 4$.*

Tot i que musicalment existeixen 12 acords Augmentats, només n'hi ha 4 en el sentit sonor, ja que per exemple, l'acord de Do Augmentat sona exactament igual que l'acord de Mi Augmentat i el de Lab Augmentat. Això es deu al fet que treballem sobre l'escala diatònica del sistema temperat, que considera que la nota $a\sharp$ és la mateixa que la nota $(a + 2)\flat$ (Veure Figura 2.5). Per tant, només tenim 4 funcions característiques diferents.

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
<i>Do Aug</i>	3	0	0	3	0	0	3	0	0	3	0	0
<i>Re\flat Aug</i>	3	0	0	$-3i$	0	0	-3	0	0	$3i$	0	0
<i>Re Aug</i>	3	0	0	-3	0	0	3	0	0	-3	0	0
<i>Mi\flat Aug</i>	3	0	0	$3i$	0	0	-3	0	0	$-3i$	0	0
<i>Mi Aug</i>	3	0	0	3	0	0	3	0	0	3	0	0
<i>Fa Aug</i>	3	0	0	$-3i$	0	0	-3	0	0	$3i$	0	0
<i>Fa\sharp Aug</i>	3	0	0	-3	0	0	3	0	0	-3	0	0
<i>Sol Aug</i>	3	0	0	$3i$	0	0	-3	0	0	$-3i$	0	0
<i>La\flat Aug</i>	3	0	0	3	0	0	3	0	0	3	0	0
<i>La Aug</i>	3	0	0	$-3i$	0	0	-3	0	0	$3i$	0	0
<i>Si\flat Aug</i>	3	0	0	-3	0	0	3	0	0	-3	0	0
<i>Si Aug</i>	3	0	0	$3i$	0	0	-3	0	0	$-3i$	0	0

Figura 3.11: Coeficients de Fourier dels acords Augmentats

D'altra banda, tal i com es veu a la Figura 3.11 la majoria dels coeficients de Fourier dels acords Augmentats són nuls. En particular, el coeficient a_5 és igual a 0, cosa que implica que en escollir els coeficients a_3 i a_5 per a definir el tor tal com hem fet amb els altres acords, obtindrem un tor degenerat, sense volum; és a dir una circumferència de radi la magnitud que defineix el coeficient de Fourier a_3 .

Definició 3.3.2. *Anomenarem tor Augmentat a la circumferència de radi $R^+ = 3$ definida en \mathbb{C} per l'equació*

$$|a_3| = 3.$$

Així doncs, el tor Augmentat és una circumferència situada a l'interior del tor de les tonalitats, però de radi R^+ més gran que R , tal com es veu a la Figura 3.12.

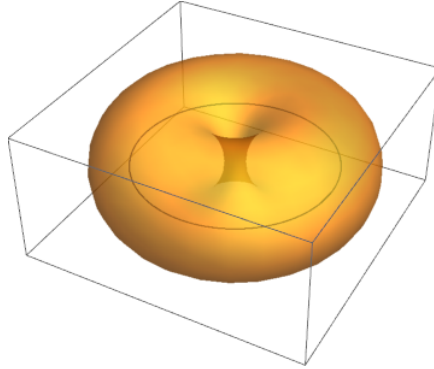


Figura 3.12: El tor Augmentat

Si observem la taula de la Figura 3.11, tot i que $\arg(a_3) \neq 0$, molts dels coeficients de Fourier associats als acords Augmentats són nuls, i per tant no se'ls pot calcular la fase per no estar definida en el 0. El que considerarem, doncs, és el parell de fases $(\arg(a_3), \arg(a_5))$, on $\arg(a_3)$ pren valors $0, -\frac{\pi}{2}, \pi$ i $\frac{\pi}{2}$ i $\arg(a_5) = v$ amb $v \in (0, 2\pi]$, de manera que no representarem els 4 acords Augmentats com a punts sinó com a 4 circumferències al voltant del tor de les tonalitats amb el centre situat sobre del tor Augmentat, tal i com es veu a la Figura 3.13.

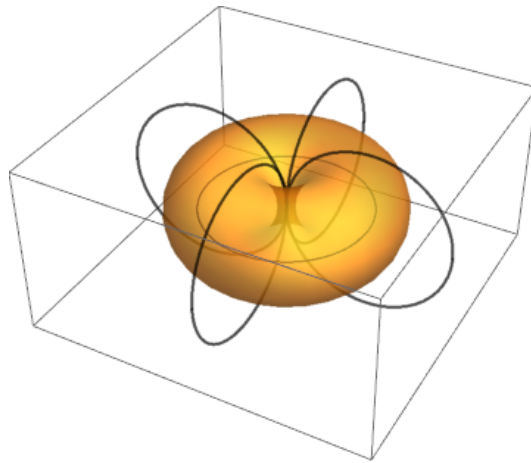


Figura 3.13: Una representació dels acords Augmentats

Tal com hem comentat en el capítol anterior, a cada línia vertical del tor pla de les tonalitats (Figura 2.19) hi ha tres acords, dels quals si en considerem només la fonamental acord obtenim tres notes que defineixen un acord Augmentat. A més, els 3 acords Augmentats de notes fonamentals les 3 de la mateixa línia vertical sonen exactament igual. Així doncs, s'intueix que podem considerar les línies verticals en el tor pla de les tonalitats o, el que és el mateix, els meridians del tor de les tonalitats com els propis acords Augmentats.

Per tant, si fem la projecció de les 4 circumferències de la Figura 3.13 sobre el tor de les tonalitats, obtenim 4 meridians tonals Augmentats que coincideixen amb els meridians tonals disminuïts, obtenint així la representació de la imatge següent:

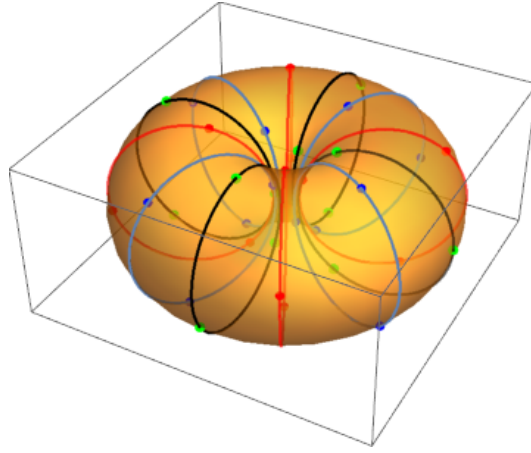


Figura 3.14: Els acords Augmentats com a meridians disminuïts

És gràcies als acords Augmentats, doncs, que podem recórrer el tor de les tonalitats passant per tots els acords, usant els valors de les distàncies de l'apartat anterior, ja que cada un dels 4 acords Augmentats correspon a un meridià disminuït, i per tant els acords Augmentats es comporten com a *meridians de pas* entre tonalitats Majors i tonalitats menors.

Finalment, ja podem donar una representació de tots els acords tríades definits, Majors, menors Augmentats i disminuïts, sobre el tor pla de les tonalitats, costats $2\pi(R + r)$ i $2\pi r$, i sobre el tor de les tonalitats de radis $R = 2.236$ i $r = 1.932$.

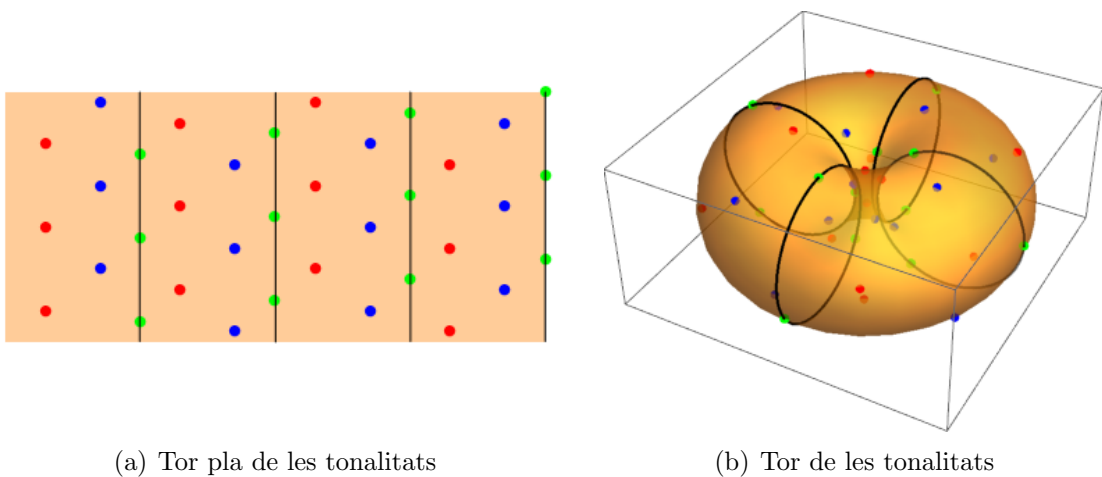


Figura 3.15: Representació dels acords Majors, menors, Augmentats i disminuïts

3.4 Representació musical dels grafs tonals

Un cop formulades les diferents maneres de modular d'una tonalitat a una altra, podem representar les modulacions en un pentagrama de cara a poder escoltar com sonen, i veure com es comporten, en qüestions de translacions d'acords. Les notes dels acords de les partitures són de $\mathcal{N} \subset \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, definit anteriorment com el conjunt de les 12 notes de la octava central d'un piano. De cara a la composició musical, però, podem variar l'alçada de les notes per tal que sonin més agudes o més greus.

Modulacions monomodals

Els tres pentagrames a continuació corresponen a algunes de les modulacions representades pels cicles monomodals. Al primer pentagrama veiem una modulació monomodal Major iniciada en $\text{Re}\flat$, al segon hi trobem una modulació monomodal menor iniciada en do i a l'últim pentagrama una modulació monomodal disminuïda iniciada en do disminuït.



Figura 3.16: Modulacions monomodals dels tres modes

Les modulacions monomodals entre acords Majors i entre acords menors es comporten de la mateixa manera; en tots dos casos es passa d'un acord a un altre traslladant dues notes per 1 semitò, i sense variar la tercera nota. En canvi, en els acords disminuïts trobem que dues notes pateixen una translació per 1 semitò, i la tercera nota per 2 semitons.

Modulacions bimodals

Un exemple de modulació bimodal entre tonalitats Majors i menors és el que es veu a continuació:

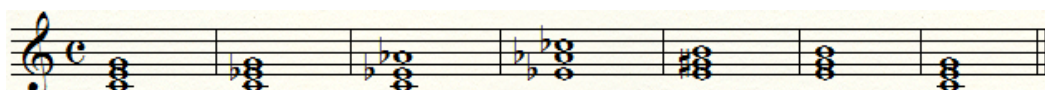


Figura 3.17: Modulació bimodal

S'observa com, per anar d'un acord a un altre, només es mou una de les tres notes de l'acord, variant un semitò.

Modulacions amb acords de pas

A continuació veiem un exemple de modulació amb els acords disminuïts com a acords de pas. En particular, a l'esquerra trobem una modulació de pes 1 i a la dreta una modulació de pes 2:

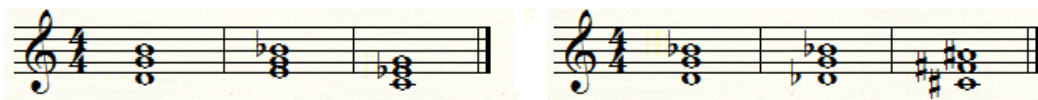


Figura 3.18: Modulacions de Pes 1 i de Pes 2

Tal com s'observa, com que no són grafs tancats i no volem repetir acords, les partitures anteriors comencen i acaben en acords diferents. A més, els pesos es comporten de manera diferent: en el primer pentagrama veiem com el canvi d'un acord a un altre es dona per traslladar una nota 2 semitons i una altra nota un semitò, deixant la tercera nota intacta. En canvi, al pentagrama corresponent a la modulació de pes 2, els acords només varien una de les notes per un semitò.

En considerar la modulació que s'obté usant els dos pesos més petits que tenim, s'obté el que es veu al pentagrama de la Figura 3.19. Tal com s'observava en els grafs de la Figura 3.5, es tracta d'una modulació que pot començar i acabar en el mateix acord, però el camí que recorre repeteix acords.



Figura 3.19: Modulació de Pesos 1 i 2

La combinació dels pesos 1 i 2, tot i no ser una modulació que ens permeti anar de qualsevol acord a qualsevol altre, dona color a l'harmonia ja que, com hem comentat, els dos pesos es comporten d'una manera diferent, donant lloc així a dos tipus de translació d'un acord a un altre.

Modulacions hamiltonianes

A continuació observem les dos partitures associades als cicles hamiltonians dels grafs hamiltonians de la Figura 3.6.

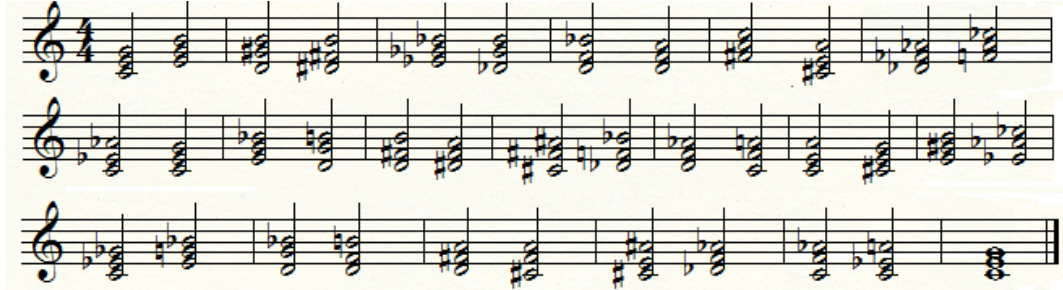


Figura 3.20: Modulació hamiltoniana de pesos 1 i 3

En aquesta primera partitura s'observa com el fet d'usar els pesos 1 i 3 dóna riquesa harmònica, ja que hi ha dues maneres d'anar d'un acord a un altre, en el sentit de variacions de semitons. En canvi, a la partitura a continuació tots els canvis entre acords són iguals, variant només una nota per un semitò. Evidentment la riquesa musical d'aquesta partitura és inferior.

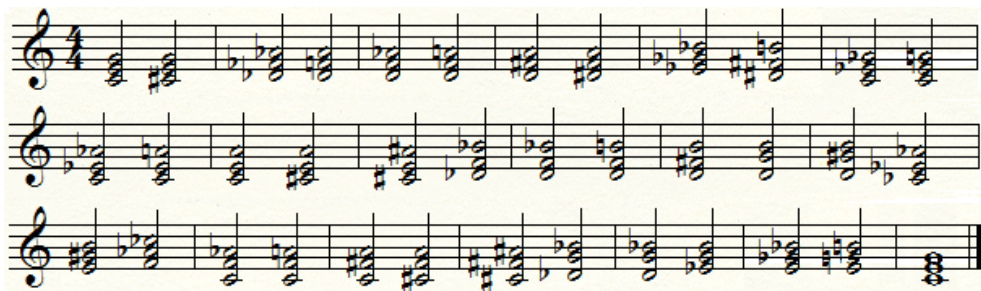


Figura 3.21: Modulació hamiltoniana de pesos 2 i 3

Finalment trobem la partitura amb la modulació hamiltoniana associada a un cicle hamiltonià del Graf hamiltonià de les tríades, la qual té només 2 tipus de translació entre acords tot i utilitzar 3 pesos:



Figura 3.22: Modulació hamiltoniana de les tríades

Capítol 4

Mathematica notebooks

Les funcions que hem usat per a la programació dels notebooks en *Mathematica 10.4* són, per ordre d'aparició, les que veiem a continuació:

Fourier, Abs, Arg, Table, Labeled, ListPlot, Show, Graphics, ParametricPlot3D, Text, Min, Position, Union, Join, Flatten, Graph, HamiltonianGraphQ, FindHamiltonianCycle.

En els propers apartats del capítol donaré un índex amb totes les funcions que hem creat amb *Mathematica 10.4* per a la realització del treball.

4.1 Acords Majors i acords menors

acordsMm	Funció característica dels acords Majors i menors
CoefMm	Coeficients de Fourier dels acords Majors i menors
fasesm	Fases dels acords menors
fasesM	Fases dels acords Majors
fasesMm	Fases dels acords Majors i menors
R	Radi gran del tor de les tonalitats Majors i menors
r	Radi petit del tor de les tonalitats Majors i menors
CoordPlam	Coordenades dels acords menors en el tor pla
CoordPlaM	Coordenades dels acords Majors en el tor pla
CoordPlaMm	Coordenades dels acords Majors i menors en el tor pla
CoordPlam2	Coordenades dels acords menors en el tor pla (amb noms)
CoordPlaM2	Coordenades dels acords Majors en el tor pla (amb noms)
PuntsPlaM	Representació d'acords Majors en el pla
PuntsPlaM2	Representació d'acords Majors en el pla (amb noms)
PuntsPlam	Representació d'acords menors en el pla
PuntsPlam2	Representació d'acords menors en el pla (amb noms)
PuntsPlaMm	Representació d'acords Majors i menors en el pla
PuntsPlaMm2	Representació d'acords Majors i menors en el pla (amb noms)
TorPla	Tor pla de les tonalitats Majors i menors
TorPlaMm	Representació d'acords Majors i menors sobre TorPla

<code>Tor[u,v]</code>	Equacions paramètriques del tor de radis <code>R</code> i <code>r</code>
<code>TorMm</code>	Representació del Tor de les tonalitats
<code>CoordTorM</code>	Coordenades dels acords Majors en el tor
<code>CoordTorm</code>	Coordenades dels acords menors en el tor
<code>CoordTorM2</code>	Coordenades dels acords Majors en el tor (amb noms)
<code>CoordTorm2</code>	Coordenades dels acords menors en el tor (amb noms)
<code>PuntsTorM</code>	Representació d'acords Majors a l'espai
<code>PuntsTorM2</code>	Representació d'acords Majors a l'espai (amb noms)
<code>PuntsTorm</code>	Representació d'acords menors en l'espai
<code>PuntsTorm2</code>	Representació d'acords menors en l'espai (amb noms)
<code>PuntsTorMm</code>	Representació d'acords Majors i menors en l'espai
<code>PuntsTorMm2</code>	Representació d'acords Majors i menors en l'espai (amb noms)

4.2 Acords disminuïts

<code>acordsd</code>	Funció característica dels acords disminuïts
<code>Coefd</code>	Coefficients de Fourier dels acords disminuïts
<code>fasesd</code>	Fases dels acords disminuïts
<code>Rd</code>	Radi gran del tor disminuït
<code>rd</code>	Radi petit del tor disminuït
<code>CoordPladism</code>	Coordenades dels acords disminuïts en el tor pla disminuït
<code>CoordPladism2</code>	Coordenades dels acords disminuïts en el tor pla disminuït (amb noms)
<code>PuntsPladism</code>	Representació d'acords disminuïts en el tor pla disminuït
<code>PuntsPladism2</code>	Representació d'acords disminuïts en el tor pla disminuït (amb noms)
<code>TorPladism</code>	Tor pla disminuït
<code>CoordPlad</code>	Coordenades dels acords disminuïts en el <code>TorPla</code>
<code>CoordPlad2</code>	Coordenades dels acords disminuïts en el <code>TorPla</code> (amb noms)
<code>PuntsPlad</code>	Representació d'acords disminuïts en el <code>TorPla</code>
<code>PuntsPlad2</code>	Representació d'acords disminuïts en el <code>TorPla</code> (amb noms)
<code>PuntsPlaMmd</code>	Representació dels 3 tipus d'acord en el <code>TorPla</code>
<code>PuntsPlaMmd2</code>	Representació dels 3 tipus d'acord en el <code>TorPla</code> (amb noms)
<code>TorPlaMmd</code>	<code>TorPla</code> amb tots els acords representats
<code>tor[u,v]</code>	Equacions paramètriques del tor disminuït de radis <code>Rd</code> , <code>rd</code>
<code>tord</code>	Representació del Tor disminuït
<code>Coordtord</code>	Coordenades dels acords disminuïts en el tor disminuït
<code>Coordtord2</code>	Coordenades dels acords disminuïts en el tor disminuït (amb noms)
<code>Puntstord</code>	Representació dels acords disminuïts en el tor disminuït
<code>Puntstord2</code>	Representació dels acords disminuïts en el tor disminuït (amb noms)
<code>CoordTord</code>	Coordenades dels acords disminuïts sobre el <code>TorMm</code>
<code>CoordTord2</code>	Coordenades dels acords disminuïts sobre el <code>TorPlaMm</code> (amb noms)
<code>PuntsTord</code>	Representació d'acords disminuïts en l'espai
<code>PuntsTord2</code>	Representació d'acords disminuïts en l'espai (amb noms)
<code>PuntsTorMmd</code>	Representació dels 3 tipus d'acord en l'espai
<code>PuntsTorMmd2</code>	Representació dels 3 tipus d'acord en l'espai (amb noms)

4.3 Camins entre acords

L	Mida de la base del TorPla
l	Mida de l'altura del TorPla
distancia[P,Q]	Distància entre dos punts, definida en el Capítol 3
CoordPlaMmd	Coordenades dels 3 tipus d'acord en el TorPla
DistanciesM	Taula de distàncies entre acords Majors
DistanciesM2	DistanciesM canviant valors de la diagonal per 100
Distanciesm	Taula de distàncies entre acords menors
Distanciesm2	Distanciesm canviant valors de la diagonal per 100
Distanciesd	Taula de distàncies entre acords disminuïts
Distanciesd2	Distanciesd canviant valors de la diagonal per 100
DistanciesMm	Taula de distàncies entre acords Majors i acords menors
DistanciesMm2	DistanciesMm canviant valors de la diagonal per 100
DistanciesMmd	Taula de distàncies entre acords Majors, menors i disminuïts
DistanciesMmd2	DistanciesMmd canviant valors de la diagonal per 100
Pes1	Distància més petita trobada en DistanciesMmd2
Pes2	Segona distància més petita trobada en DistanciesMmd2
Pes3	Distància més petita trobada en DistanciesMm2
Pes4	Distància més petita trobada en DistanciesM2
CiclesM	Cicles monomodals Majors
Ciclesm	Cicles monomodals menors
Ciclesd	Cicles monomodals disminuïts
CiclesMm	Cicles bimodals de mode Major i mode menor
GrafPes12	Graf de pesos Pes1 i Pes2
GrafPes13	Graf hamiltonià de pesos Pes1 i Pes3
GrafPes23	Graf hamiltonià de pesos Pes2 i Pes3
GrafHamilton	Graf hamiltonià de les tríades, de pesos Pes1, Pes2 i Pes3

4.4 Meridians tonals

CoordGPlaM	Coordenades de 4 punts de diferents meridians Majors del TorPla
CoordGPlam	Coordenades de 4 punts de diferents meridians menors del TorPla
CoordGPlad	Coordenades de 4 punts de diferents meridians disminuïts del TorPla
CoordGTorM	Coordenades sobre el TorMm dels punts CoordGPlaM
CoordGTorm	Coordenades sobre el TorMm dels punts CoordGPlam
CoordGTord	Coordenades sobre el TorMm dels punts CoordGPlad
AcordsGDo	Coordenades dels 3 acords del TorPla que pertanyen al meridià que passa per l'acord de Do Major
AcordsGdo	Coordenades dels 3 acords del TorPla que pertanyen al meridià que passa per l'acord de do menor
AcordsGdod	Coordenades dels 3 acords del TorPla que pertanyen al meridià que passa per l'acord de do disminuït
AcordsGRe	Coordenades dels 3 acords del TorPla que pertanyen al meridià que passa per l'acord de Re Major

AcordsGre	Coordenades dels 3 acords del TorPla que pertanyen al meridià que passa per l'acord de re menor
AcordsGred	Coordenades dels 3 acords del TorPla que pertanyen al meridià que passa per l'acord de re disminuït
AcordsGFa	Coordenades dels 3 acords del TorPla que pertanyen al meridià que passa per l'acord de Fa Major
AcordsGfa	Coordenades dels 3 acords del TorPla que pertanyen al meridià que passa per l'acord de fa menor
AcordsGfad	Coordenades dels 3 acords del TorPla que pertanyen al meridià que passa per l'acord de fa disminuït
AcordsGSol	Coordenades dels 3 acords del TorPla que pertanyen al meridià que passa per l'acord de Sol Major
AcordsGsol	Coordenades dels 3 acords del TorPla que pertanyen al meridià que passa per l'acord de sol menor
AcordsGsold	Coordenades dels 3 acords del TorPla que pertanyen al meridià que passa per l'acord de sol disminuït
PuntsGDo	Representació en l'espai de AcordsGDo
PuntsGdo	Representació en l'espai de AcordsGdo
PuntsGdod	Representació en l'espai de AcordsGdod
PuntsGRe	Representació en l'espai de AcordsGRe
PuntsGre	Representació en l'espai de AcordsGre
PuntsGred	Representació en l'espai de AcordsGred
PuntsGFa	Representació en l'espai de AcordsGFa
PuntsGfa	Representació en l'espai de AcordsGfa
PuntsGfad	Representació en l'espai de AcordsGfad
PuntsGSol	Representació en l'espai de AcordsGSol
PuntsGsol	Representació en l'espai de AcordsGsol
PuntsGsold	Representació en l'espai de AcordsGsold
Meridian[u,v]	Equacions paramètriques dels meridians del TorMm
TorMm0	TorMm sense meridians ni paral·lels
GDo	Representació en l'espai del meridià Major que passa per l'acord Do
Gdo	Representació en l'espai del meridià menor que passa per l'acord Do
Gdod	Representació en l'espai del meridià disminuït que passa per l'acord Do
GRe	Representació en l'espai del meridià Major que passa per l'acord Re
Gre	Representació en l'espai del meridià menor que passa per l'acord Re
Gred	Representació en l'espai del meridià disminuït que passa per l'acord Re
GFa	Representació en l'espai del meridià Major que passa per l'acord Fa
Gfa	Representació en l'espai del meridià menor que passa per l'acord Fa
Gfad	Representació en l'espai del meridià disminuït que passa per l'acord Fa
GSol	Representació en l'espai del meridià Major que passa per l'acord Sol
Gsol	Representació en l'espai del meridià menor que passa per l'acord Sol
Gsold	Representació en l'espai del meridià disminuït que passa per l'acord Sol

4.5 Acords Augmentats

<code>acordsA</code>	Funció característica dels acords Augmentats
<code>CoefA</code>	Coefficients de Fourier dels acords Augmentats
<code>fasesA</code>	Fases dels acords Augmentats
<code>RA</code>	Radi gran del tor Augmentat
<code>ra</code>	Radi petit del tor Augmentat
<code>TOR[u,v]</code>	Equacions paramètriques del Tor Augmentat
<code>TorA</code>	Representació del Tor Augmentat
<code>MeridiaA</code>	Equacions paramètriques dels meridians de <code>TorA</code>
<code>centreDoA</code>	Centre del meridià Augmentat que està situat al voltant del meridià disminuït de Do
<code>PuntcentreDoA</code>	Representació en l'espai de <code>centreDoA</code>
<code>centreReA</code>	Centre del meridià Augmentat que està situat al voltant del meridià disminuït de Re
<code>PuntcentreReA</code>	Representació en l'espai de <code>centreReA</code>
<code>centreFaA</code>	Centre del meridià Augmentat que està situat al voltant del meridià disminuït de Fa
<code>PuntcentreFaA</code>	Representació en l'espai de <code>centreFaA</code>
<code>centreSola</code>	Centre del meridià Augmentat que està situat al voltant del meridià disminuït de Sol
<code>PuntcentreSola</code>	Representació en l'espai de <code>centreSola</code>
<code>GDoA</code>	Representació en l'espai de l'acord de Do Augmentat
<code>GReA</code>	Representació en l'espai de l'acord de Re Augmentat
<code>GFaA</code>	Representació en l'espai de l'acord de Fa Augmentat
<code>GSola</code>	Representació en l'espai de l'acord de Sol Augmentat
<code>MDo</code>	Projecció de <code>GDoA</code> en el <code>TorMm</code>
<code>MRe</code>	Projecció de <code>GReA</code> en el <code>TorMm</code>
<code>MFa</code>	Projecció de <code>GFaA</code> en el <code>TorMm</code>
<code>MSol</code>	Projecció de <code>GSola</code> en el <code>TorMm</code>

Conclusions

Com a conclusió general del treball diria que sí, les matemàtiques i la música estan ben relacionades. En aquest cas, les matemàtiques ens han servit com a mitjà creador de pautes per a la composició musical, mitjançant la modelització de patrons que reflecteixen la tonalitat de la qual partim i la tonalitat a la qual ens volem dirigir.

M'he endut moltes sorpreses a mesura que avançava el treball. La primera de totes, el fet que les magnituds i les fases dels coeficients de Fourier associats a uns acords ens informin sobre l'estructura i sobre les possibilitats melòdiques d'aquests. D'altra banda hem vist també com, matemàticament, els coeficients de Fourier més destacats associats als acords són a_3 i a_5 , la qual cosa té sentit musical ja que són els dos coeficients associats als harmònics més importants d'un acord; aquests coeficients tenen propietats remarcables a l'hora de produir un timbre més agradable a l'oïda.

A més, m'he trobat amb què la localització de dos acords “veïns” en el tor coincideix amb la de dos acords propers en el piano. Es tracta d'acords les notes dels quals difereixen en pocs semitons o, fins i tot, d'alguns que comparteixen un parell de notes. Així doncs, les modulacions musicals formulades a partir de distàncies mínimes en el tor es corresponen amb modulacions entre acords propers en el piano.

Finalment, el fet de poder fer un resum de tot plegat i transmetre-ho de manera audible confirma que, evidentment, podem fer música a partir de matemàtiques, i que hi ha moltes matemàtiques en la música.

Bibliografia

- [1] Amiot, Emmanuel. The torii of phases. [Corrected title: The tori of phases] *Mathematics and computation in music*, 1–18. Lecture Notes in Comput. Sci., 7937. Springer, Heidelberg, 2013.
- [2] Amiot, Emmanuel. David Lewin and maximally even sets. *J. Math. Music* 1 (2007), no. 3, 157–172.
- [3] Cerdà, Joan. *Linear functional analysis*. Graduate Studies in Mathematics, 116. American Mathematical Society, Providence, RI; Real Sociedad Matemática Española, Madrid, 2010. xiv+330 pp. ISBN: 978-0-8218-5115-9.
- [4] J. Cooley, P. Lewis, and P. Welch. The finite Fourier transform. *IEEE Trans. Audio Electroacoustics* 17 (2), 77-85 (1969).
- [5] Currás, C. *Geometria diferencial: varietats diferenciables i varietats de Riemann*. Edicions Universitat de Barcelona, 2003. Col·lecció UB (Universitat de Barcelona). ISBN 8483383772.
- [6] Finale NotePad 2012. Music notation software.
- [7] Irons, Mark L. *The Curvature and Geodesics of the Torus*. www.rdrop.com/~half/math/torus/torus.geodesics.pdf
- [8] O'Neill, Barrett. *Elementary differential geometry*. Revised second edition. Elsevier, Academic Press, Amsterdam, 2006. xii+503 pp. ISBN: 978-0-12-088735-4; 0-12-088735-5.
- [9] Vañó, L. *Música i matemàtiques: una introducció al tractament matemàtic del so*. UB, 2012. Treball acadèmicament dirigit per P. Bayer.
- [10] Wolfram Research, Inc., *Mathematica*, Versión 10.4, Champaign, IL (2016).
- [11] Zamacois, J. *Tratado de Armonia* Libros I, II, III. Editorial Labor, ISBN: 8433578472 (o.c.), 8433578480 (vol. 1), 8433578499 (vol. 2), 8433578502 (vol. 3).

Annex a la Memòria

Una formulació matemàtica de les
modulacions musicals

Acords Majors i acords menors

Coeficients de Fourier, magnituds i fases

Funció característica

Escrivim la funció característica χ_A dels acords Majors i dels acords menors de forma intercalada.

```
In[1]:= acordsMm =  
  {{1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0}, {1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0},  
   {0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0},  
   {0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0},  
   {0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0},  
   {0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1}, {0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1},  
   {1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0}, {1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0},  
   {0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0},  
   {0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1},  
   {0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1}, {1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0},  
   {1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0},  
   {0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0},  
   {0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1}, {0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1}};
```

Coeficients de Fourier

Com que la definició dels coeficients de Fourier és donada per la fórmula $a(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \left(e^{\frac{-i2\pi nm}{N}} \cdot \chi_A(m) \right)$, aleshores usem `FourierParameters→{1,-1}`.

```
In[2]:= CoefMm = Table[Fourier[acordsMm[[k]], FourierParameters → {1, -1}], {k, 1, 24}];  
          Ltabla      Ltransformada de Fourier discreta      Lparámetros de transformada de Fourier  
  
In[3]:= TableForm[CoefMm,  
          Lforma de tabla  
  TableHeadings → {"do m", "Do M", "reb m", "Reb M", "re m", "Re M", "mib m",  
                    Lcabeceras de tabla      Lrepite      Lparte real  
                    "Mib M", "mi m", "Mi M", "fa m", "Fa M", "fa# m", "Fa# M", "sol m", "Sol M",  
                    "lab m", "Lab M", "la m", "La M", "sib m", "Sib M", "si m", "Si M"},  
  {"a0", "a1", "a2", "a3", "a4", "a5", "a6", "a7", "a8", "a9", "a10", "a11"}];
```

Magnituds

```
In[4]:= TableForm[Abs[CoefMm], TableHeadings →
  {{"do m", "Do M", "reb m", "Reb M", "re m", "Re M", "mib m", "Mib M", "mi m",
    "Mi M", "fa m", "Fa M", "fa# m", "Fa# M", "sol m", "Sol M", "lab m", "Lab M",
    "la m", "La M", "sib m", "Sib M", "si m", "Si M"}, {"|a0|", "|a1|", "|a2|",
    "|a3|", "|a4|", "|a5|", "|a6|", "|a7|", "|a8|", "|a9|", "|a10|", "|a11|"}];
```

Com a conseqüència del *Teorema 2.2.1* del Capítol 2, els coeficients de Fourier dels acords Majors i dels acords menors comparteixen les magnituds.

Fases

```
In[5]:= TableForm[Arg[CoefMm],
  {{"do m", "Do M", "reb m", "Reb M", "re m", "Re M", "mib m",
    "Mi M", "fa m", "Fa M", "fa# m", "Fa# M", "sol m", "Sol M",
    "lab m", "Lab M", "la m", "La M", "sib m", "Sib M", "si m", "Si M"},
  {"arg(a0)", "arg(a1)", "arg(a2)", "arg(a3)", "arg(a4)", "arg(a5)",
    "arg(a6)", "arg(a7)", "arg(a8)", "arg(a9)", "arg(a10)", "arg(a11)"}];
```

Representació sobre el tor pla

Coordenades a partir de les fases

Les coordenades de cada acord Major i de cada acord menor són donades per les fases dels coeficients a3 i a5.

```
In[6]:= fasesm =
  Table[{Arg[CoefMm][[k, 4]], Arg[CoefMm][[k, 6]]}, {k, 1, Length[Arg[CoefMm]], 2}];
In[7]:= fasesM =
  Table[{Arg[CoefMm][[k, 4]], Arg[CoefMm][[k, 6]]}, {k, 2, Length[Arg[CoefMm]], 2}];
In[8]:= fasesMm = Table[{Arg[CoefMm][[k, 4]], Arg[CoefMm][[k, 6]]}, {k, 1, Length[Arg[CoefMm]]};
In[9]:= TableForm[fasesMm, TableHeadings →
  {"do m", "Do M", "reb m", "Reb M", "re m", "Re M", "mib m", "Mib M", "mi m",
    "Mi M", "fa m", "Fa M", "fa# m", "Fa# M", "sol m", "Sol M", "lab m", "Lab M",
    "la m", "La M", "sib m", "Sib M", "si m", "Si M"}, {"arg(a3)", "arg(a5)"}];
```

Coordenades sobre el tor pla

Representarem els acords sobre un rectangle, identificat amb un tor pla, de costats $2\pi(R+r)$ i $2\pi r$, amb $R=|a3|$ i $r=|a5|$.

```
In[10]:= R = Abs[CoefMm[[1]][[4]]]
          |valor absoluto
```

```
Out[10]= 2.23607
```

```
In[11]:= r = Abs[CoefMm[[1]][[6]]]
          |valor absoluto
```

```
Out[11]= 1.93185
```

```
In[12]:= CoordPlam = Table[{(R + r) fasesm[[k]][[1]], r fasesm[[k]][[2]]}, {k, Length[fasesm]};
          |tabla                                     |longitud
```

```
In[13]:= CoordPlaM = Table[{(R + r) fasesM[[k]][[1]], r fasesM[[k]][[2]]}, {k, Length[fasesM]};
          |tabla                                     |longitud
```

```
In[14]:= CoordPlaMm =
          Table[{(R + r) fasesMm[[k]][[1]], r fasesMm[[k]][[2]]}, {k, Length[fasesMm]};
          |tabla                                     |longitud
```

Representació dels acords sobre el tor pla

Assignació del nom de l'acord a cada punt

```
In[15]:= CoordPlam2 = {Labeled[CoordPlam[[1]], do], Labeled[CoordPlam[[2]], reb],
                       |etiquetado                 |etiquetado
                       Labeled[CoordPlam[[3]], re], Labeled[CoordPlam[[4]], mib],
                       |etiquetado                 |etiquetado
                       Labeled[CoordPlam[[5]], mi], Labeled[CoordPlam[[6]], fa],
                       |etiquetado                 |etiquetado
                       Labeled[CoordPlam[[7]], fa#], Labeled[CoordPlam[[8]], sol],
                       |etiquetado                 |etiquetado
                       Labeled[CoordPlam[[9]], lab], Labeled[CoordPlam[[10]], la],
                       |etiquetado                 |etiquetado
                       Labeled[CoordPlam[[11]], sib], Labeled[CoordPlam[[12]], si]};
                       |etiquetado                 |etiquetado
```

```
In[16]:= CoordPlaM2 = {Labeled[CoordPlaM[[1]], DO], Labeled[CoordPlaM[[2]], REB],
                       |etiquetado                 |etiquetado
                       Labeled[CoordPlaM[[3]], RE], Labeled[CoordPlaM[[4]], MIB],
                       |etiquetado                 |etiquetado
                       Labeled[CoordPlaM[[5]], MI], Labeled[CoordPlaM[[6]], FA],
                       |etiquetado                 |etiquetado
                       Labeled[CoordPlaM[[7]], FA#], Labeled[CoordPlaM[[8]], SOL],
                       |etiquetado                 |etiquetado
                       Labeled[CoordPlaM[[9]], LAB], Labeled[CoordPlaM[[10]], LA],
                       |etiquetado                 |etiquetado
                       Labeled[CoordPlaM[[11]], SIB], Labeled[CoordPlaM[[12]], SI]};
                       |etiquetado                 |etiquetado
```

Representació i visualització dels acords en el pla

```
In[17]:= PuntsPlaM = ListPlot[CoordPlaM, PlotStyle -> Directive[{PointSize[0.012], Red}]];
          |representación de lista |estilo de repre... |directiva |tamaño de punto |rojo
```

```

In[18]:= PuntsPlam2 = ListPlot[Labeled[#, #] & /@ CoordPlam2,
    [representa... [etiquetado
    PlotStyle → Directive[{PointSize[0.012], Red}]];
    [estilo de repre... [directiva [tamaño de punto [rojo

In[19]:= PuntsPlam = ListPlot[CoordPlam, PlotStyle → Directive[{PointSize[0.012], Blue}]];
    [representación de lista [estilo de repre... [directiva [tamaño de punto [azul

In[20]:= PuntsPlam2 = ListPlot[Labeled[#, #] & /@ CoordPlam2,
    [representa... [etiquetado
    PlotStyle → Directive[{PointSize[0.012], Blue}]];
    [estilo de repre... [directiva [tamaño de punto [azul

In[21]:= PuntsPlamM = Show[PuntsPlam, PuntsPlam, PlotRange → Automatic];
    [muestra [rango de repre... [automático

In[22]:= PuntsPlamM2 = Show[PuntsPlam2, PuntsPlam2, PlotRange → Automatic];
    [muestra [rango de repre... [automático

```

El tor pla de les tonalitats Majors i de les tonalitats menors

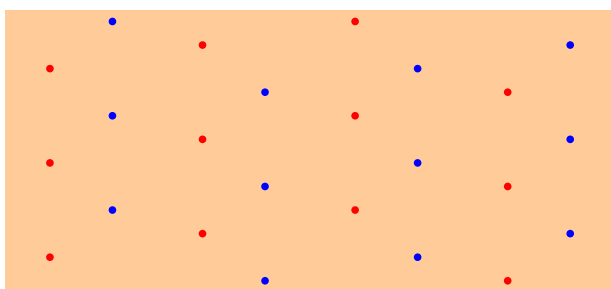
```

In[23]:= TorPla =
    Graphics[{Orange, Opacity[0.4], Rectangle[{- (R + r) Pi, -r Pi}, {(R + r) Pi, r Pi}]}];
    [gráfico [naranja [opacidad [rectángulo [número... [número pi [número... [número pi

In[24]:= TorPlaMm = Show[TorPla, PuntsPlam, PuntsPlam]
    [muestra

```

Out[24]=



Representació sobre el tor de revolució

Definició del tor

```

In[25]:= R
Out[25]= 2.23607

In[26]:= r
Out[26]= 1.93185

In[27]:= Tor[u_, v_] := {(R + r Cos[v]) Cos[u], (R + r Cos[v]) Sin[u], r Sin[v]}
    [coseno [coseno [coseno [seno [seno

In[28]:= ParametricPlot3D[Tor[u, v], {u, 0, 2 * Pi}, {v, 0, 2 * Pi}, Axes → None, Mesh → 10];
    [gráfico paramétrico 3D [número pi [número... [lejes [lning... [malla

```

```
In[29]:= TorMm = ParametricPlot3D[Tor[u, v],
    Gráfico paramétrico 3D
    {u, 0, 2 * Pi}, {v, 0, 2 * Pi}, PlotStyle -> Opacity[0.6], Mesh -> 8];
    número pi      Lnú...  Estilo de repre...  Opacidad      Malla
```

Coordenades sobre el tor

```
In[30]:= CoordTorM = Table[Tor[fasesM[[k]][[1]], fasesM[[k]][[2]]], {k, 1, 12}];
    Tabla
```

```
In[31]:= CoordTorm = Table[Tor[fasesm[[k]][[1]], fasesm[[k]][[2]]], {k, 1, 12}];
    Tabla
```

Representació dels acords sobre el tor

Assignació del nom de l'acord a cada punt

```
In[32]:= CoordTorM2 = {Labeled[CoordTorM[[1]], DO], Labeled[CoordTorM[[2]], REb],
    Etiquetado      Etiquetado
    Labeled[CoordTorM[[3]], RE], Labeled[CoordTorM[[4]], Mib],
    Etiquetado      Etiquetado
    Labeled[CoordTorM[[5]], MI], Labeled[CoordTorM[[6]], FA],
    Etiquetado      Etiquetado
    Labeled[CoordTorM[[7]], FA#], Labeled[CoordTorM[[8]], SOL],
    Etiquetado      Etiquetado
    Labeled[CoordTorM[[9]], LAb], Labeled[CoordTorM[[10]], LA],
    Etiquetado      Etiquetado
    Labeled[CoordTorM[[11]], Sib], Labeled[CoordTorM[[12]], SI]};
    Etiquetado      Etiquetado
```

```
In[33]:= CoordTorm2 = {Labeled[CoordTorm[[1]], do], Labeled[CoordTorm[[2]], reb],
    Etiquetado      Etiquetado
    Labeled[CoordTorm[[3]], re], Labeled[CoordTorm[[4]], mib],
    Etiquetado      Etiquetado
    Labeled[CoordTorm[[5]], mi], Labeled[CoordTorm[[6]], fa],
    Etiquetado      Etiquetado
    Labeled[CoordTorm[[7]], fa#], Labeled[CoordTorm[[8]], sol],
    Etiquetado      Etiquetado
    Labeled[CoordTorm[[9]], lab], Labeled[CoordTorm[[10]], la],
    Etiquetado      Etiquetado
    Labeled[CoordTorm[[11]], sib], Labeled[CoordTorm[[12]], si]};
    Etiquetado      Etiquetado
```

Representació i visualització dels acords en l'espai

```
In[34]:= PuntsTorM = ListPointPlot3D[CoordTorM, PlotStyle -> Directive[{PointSize[0.018], Red}]];
    representació 3D en punts de lista  Estilo de repre...  Directiva      Tamaño de punto  Rojo
```

```
In[35]:= PuntsTorM2 = Show[PuntsTorM,
    Muestra
    Table[Graphics3D[Text[CoordTorM2[[k]][[2]], 1.15 #] & /@ {CoordTorM2[[k]][[1]]}],
    Tabla      Gráfico 3D      Texto
    {k, 1, Length[CoordTorM2]}];
    Longitud
```

```

In[36]:= PuntsTorm = ListPointPlot3D[CoordTorm, PlotStyle → Directive[{PointSize[0.018], Blue}]];
          [representación 3D en puntos de lista] [estilo de repre... [directiva] [tamaño de punto] [azul]

In[37]:= PuntsTorm2 = Show[PuntsTorm,
          [muestra]
          Table[Graphics3D[Text[CoordTorm2[[k]][[2]], 1.15 #] & /@ {CoordTorm2[[k]][[1]]}],
          [tabla] [gráfico 3D] [texto]
          {k, 1, Length[CoordTorm2]}]];
          [longitud]

In[38]:= PuntsTorMm = Show[PuntsTorM, PuntsTorm, PlotRange → Automatic];
          [muestra] [rango de repre... [automático]

In[39]:= PuntsTorMm2 = Show[PuntsTorM2, PuntsTorm2, PlotRange → Automatic];
          [muestra] [rango de repre... [automático]

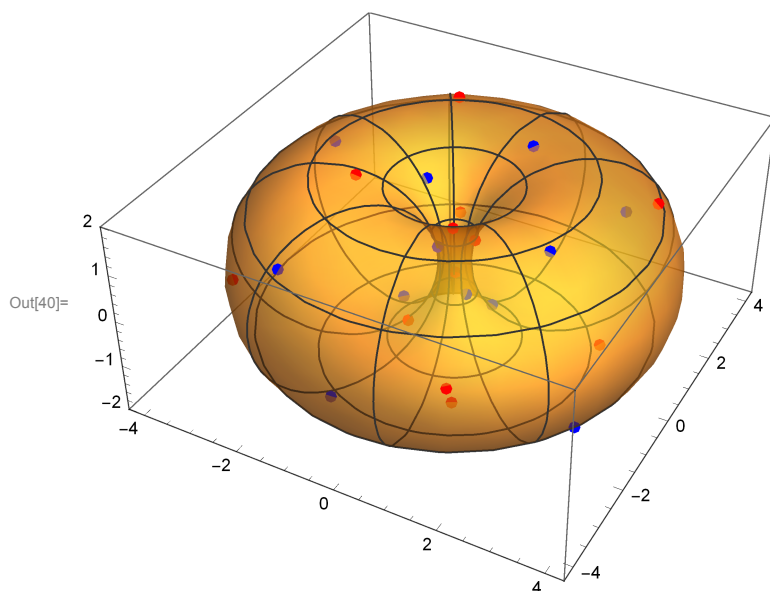
```

El tor les tonalitats Majors i de les tonalitats menors

```

In[40]:= Show[TorMm, PuntsTorMm]
          [muestra]

```



```

In[41]:= Show[TorMm, PuntsTorMm2];
          [muestra]

```

Acords disminuïts

Coeficients de Fourier, magnituds i fases

Funció característica

```
In[42]:= acordsd =  
  {{1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0},  
   {0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0},  
   {0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1},  
   {1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0},  
   {0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1}, {1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0},  
   {0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1}};
```

Coeficients de Fourier

```
In[43]:= Coefd = Table[Fourier[acordsd[[k]], FourierParameters -> {1, -1}], {k, 1, 12}];  
          tabla transformada de Fourier discreta parámetros de transformada de Fourier  
  
In[44]:= TableForm[Coefd,  
  forma de tabla  
  TableHeadings -> {"do dim", "reb dim", "re dim", "mib dim", "mi dim", "fa dim",  
    cabeceras de tabla  
    "fa# dim", "sol dim", "lab dim", "la dim", "sib dim", "si dim"},  
  {"a0", "a1", "a2", "a3", "a4", "a5", "a6", "a7", "a8", "a9", "a10", "a11"}];
```

Magnituds

```
In[45]:= TableForm[Abs[Coefd], TableHeadings ->  
  forma de tabla valor absoluto cabeceras de tabla  
  {"do dim", "do# dim", "re dim", "re# dim", "mi dim", "fa dim", "fa# dim", "sol dim",  
    "sol# dim", "la dim", "la# dim", "si dim"}, {"|a0|", "|a1|", "|a2|", "|a3|",  
    "|a4|", "|a5|", "|a6|", "|a7|", "|a8|", "|a9|", "|a10|", "|a11|"}];
```

Fases

```
In[46]:= TableForm[Arg[Coefd],  
  forma de tabla argumento complejo  
  TableHeadings -> {"do dim", "do# dim", "re dim", "re# dim", "mi dim",  
    cabeceras de tabla  
    "fa dim", "fa# dim", "sol dim", "sol# dim", "la dim", "la# dim", "si dim"},  
  {"arg(a0)", "arg(a1)", "arg(a2)", "arg(a3)", "arg(a4)", "arg(a5)",  
    "arg(a6)", "arg(a7)", "arg(a8)", "arg(a9)", "arg(a10)", "arg(a11)"}];
```

Representació sobre el tor pla

Coordenades a partir de les fases

Les coordenades de cada acord disminuït vénen donades per les fases dels coeficients a3 i a5.

```
In[47]:= fasesd = Table[{Arg[Coefd][[k, 4]], Arg[Coefd][[k, 6]]}, {k, 1, Length[Arg[Coefd]]};
           |      |      |      |
           |tabla |argumento complejo |argumento complejo |longitud |argumento complejo

In[48]:= TableForm[fasesd, TableHeadings →
           |forma de tabla |cabeceras de tabla
           {"do dim", "reb dim", "re dim", "mib dim", "mi dim", "fa dim", "fa# dim",
            "sol dim", "lab dim", "la dim", "sib dim", "si dim"}, {"arg(a3)", "arg(a5)"}];
```

Coordenades sobre el tor pla disminuït

Els acords disminuïts defineixen el seu propi tor pla, de costats $2\pi(Rd+rd)$ i $2\pi rd$ amb $Rd=rd=1$, que anomenarem **tor pla disminuït**.

```
In[49]:= Rd = Abs[Coefd[[1, 4]]]
           |valor absoluto

Out[49]= 1.

In[50]:= rd = Abs[Coefd[[1, 6]]]
           |valor absoluto

Out[50]= 1.

In[51]:= CoordPladism =
           Table[{(Rd + rd) fasesd[[k]][[1]], rd fasesd[[k]][[2]]}, {k, Length[fasesd]};
           |tabla |longitud
```

Representació dels acords sobre el tor pla disminuït

Assignació del nom de l'acord a cada punt

```
In[52]:= CoordPladism2 = {Labeled[CoordPladism[[1]], "do-"], Labeled[CoordPladism[[2]], "reb-"],
                           |etiquetado |etiquetado
                           Labeled[CoordPladism[[3]], "re-"], Labeled[CoordPladism[[4]], "mib-"],
                           |etiquetado |etiquetado
                           Labeled[CoordPladism[[5]], "mi-"], Labeled[CoordPladism[[6]], "fa-"],
                           |etiquetado |etiquetado
                           Labeled[CoordPladism[[7]], "fa#-"], Labeled[CoordPladism[[8]], "sol-"],
                           |etiquetado |etiquetado
                           Labeled[CoordPladism[[9]], "lab-"], Labeled[CoordPladism[[10]], "la-"],
                           |etiquetado |etiquetado
                           Labeled[CoordPladism[[11]], "sib-"], Labeled[CoordPladism[[12]], "si-"]};
                           |etiquetado |etiquetado
```

Representació i visualització dels acords en el pla

```
In[53]:= PuntsPladism = ListPlot[CoordPladism, PlotStyle → Directive[{PointSize[0.012], Green}]];
           |representación de lista |estilo de repre... |directiva |tamaño de punto |verde
```

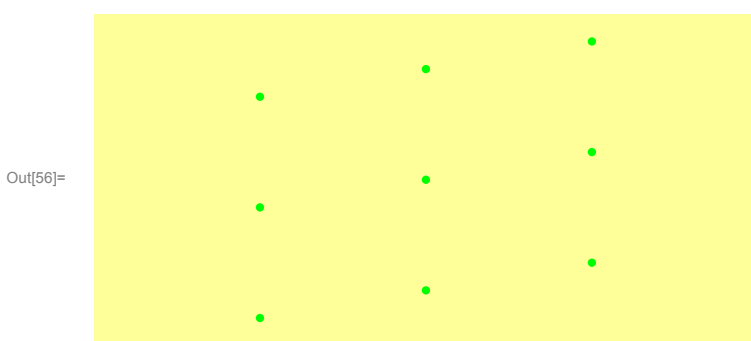


```
In[54]:= PuntsPladism2 = ListPlot[Labeled[#, #] & /@ CoordPladism2,
    Lrepresenta... Ltiquetado
    PlotStyle -> Directive[{PointSize[0.012], Green}]];
    Lestilo de repre... Ldirectiva Ltamaño de punto Lverde
```

El tor pla disminuït

```
In[55]:= TorPladism = Graphics[
    Lgráfico
    {Yellow, Opacity[0.4], Rectangle[{- (Rd + rd) Pi, -rd Pi}, {(Rd + rd) Pi, rd Pi}]}];
    Lamarillo Lopacidad Lrectángulo Lúmero pi Lúmero pi Lúmer... Lúmero pi
```

```
In[56]:= Show[TorPladism, PuntsPladism]
    Lmuestra
```



Coordenades sobre el tor pla de les tonalitats

Useu els radis $R=|a_3|$ i $r=|a_5|$ definits per les magnituds dels acords Majors i menors. Fem una projecció dels punts del tor pla disminuït al pla de les tonalitats.

```
In[57]:= CoordPlad = Table[{(R + r) fasesd[[k]][[1]], r fasesd[[k]][[2]]}, {k, Length[fasesd]}};
    Ltabla Llongitud
```

Representació dels acords sobre el tor pla de les tonalitats Majors i menors

Assignació del nom de l'acord a cada punt

```
In[58]:= CoordPlad2 = {Labeled[CoordPlad[[1]], "do-"], Labeled[CoordPlad[[2]], "reb-"],
    Ltiquetado Ltiquetado
    Labeled[CoordPlad[[3]], "re-"], Labeled[CoordPlad[[4]], "mib-"],
    Ltiquetado Ltiquetado
    Labeled[CoordPlad[[5]], "mi-"], Labeled[CoordPlad[[6]], "fa-"],
    Ltiquetado Ltiquetado
    Labeled[CoordPlad[[7]], "fa#-"], Labeled[CoordPlad[[8]], "sol-"],
    Ltiquetado Ltiquetado
    Labeled[CoordPlad[[9]], "lab-"], Labeled[CoordPlad[[10]], "la-"],
    Ltiquetado Ltiquetado
    Labeled[CoordPlad[[11]], "sib-"], Labeled[CoordPlad[[12]], "si-"]};
    Ltiquetado
```

Representació i visualització dels acords en el pla

```
In[59]:= PuntsPlad = ListPlot[CoordPlad, PlotStyle -> Directive[{PointSize[0.012], Green}]];
    Lrepresentación de lista Lestilo de repre... Ldirectiva Ltamaño de punto Lverde
```

```

In[60]:= PuntsPlad2 = ListPlot[Labeled[#, #] & /@ CoordPlad2,
    [representa... [etiquetado
    PlotStyle → Directive[{PointSize[0.012], Green}]];
    [estilo de repre... [directiva [tamaño de punto [verde

In[61]:= PuntsPlaMmd = Show[PuntsPlaM, PuntsPlam, PuntsPlad, PlotRange → Automatic];
    [muestra [rango de repre... [automático

In[62]:= PuntsPlaMmd2 = Show[PuntsPlaM2, PuntsPlam2, PuntsPlad2, PlotRange → Automatic];
    [muestra [rango de repre... [automático

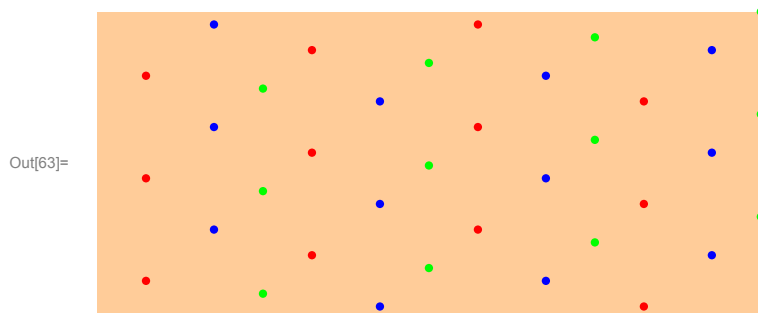
```

El tor pla de les tonalitats

```

In[63]:= TorPlaMmd = Show[TorPla, PuntsPlaM, PuntsPlam, PuntsPlad, PlotRange → Automatic]
    [muestra [rango de repre... [automático

```



Representació sobre el tor de revolució

Definició del tor disminuït

Els acords disminuïts defineixen el seu propi tor, de radi $Rd=rd=1$, que anomenarem **tor disminuït**.

```

In[64]:= Rd
Out[64]= 1.

In[65]:= rd
Out[65]= 1.

In[66]:= tor[u_, v_] := {(Rd + rd Cos[v]) Cos[u], (Rd + rd Cos[v]) Sin[u], rd Sin[v]}
    [coseno [coseno [coseno [seno [seno

In[67]:= ParametricPlot3D[tor[u, v], {u, 0, 2 * Pi}, {v, 0, 2 * Pi}, Mesh → 10];
    [gráfico paramétrico 3D [número pi [núm... [malla

In[68]:= tord = ParametricPlot3D[tor[u, v],
    [gráfico paramétrico 3D
    {u, 0, 2 * Pi}, {v, 0, 2 * Pi}, PlotStyle → Opacity[0.6], Mesh → 7];
    [número pi [núm... [estilo de repre... [opacidad [malla

```

Coordenades sobre el tor disminuït

```

In[69]:= Coordtord = Table[tor[fasesd[[k]][[1]], fasesd[[k]][[2]]], {k, 1, 12}];
    [tabla

```

Representació dels acords sobre el tor disminuït

Assignació del nom de l'acord a cada punt

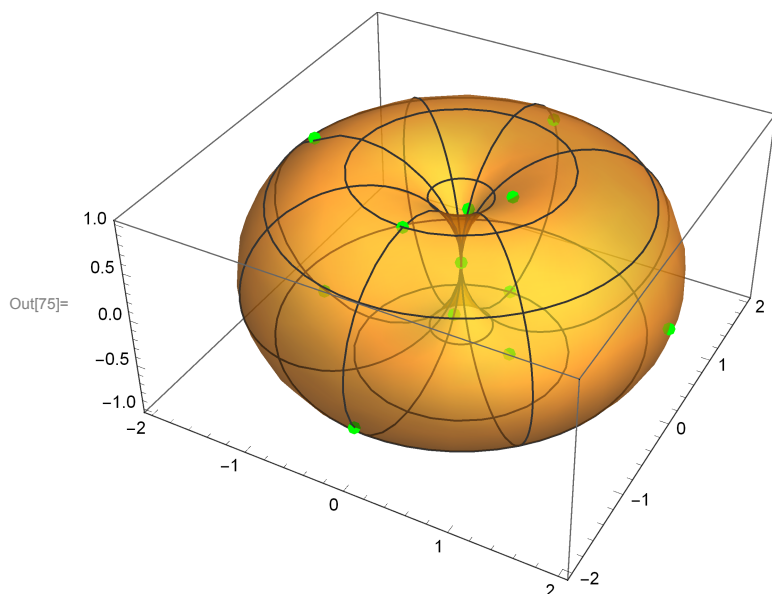
```
In[70]:= Coordtord2 = {Labeled[Coordtord[[1]], "do-"], Labeled[Coordtord[[2]], "reb-"],
  Labeled[Coordtord[[3]], "re-"], Labeled[Coordtord[[4]], "mib-"],
  Labeled[Coordtord[[5]], "mi-"], Labeled[Coordtord[[6]], "fa-"],
  Labeled[Coordtord[[7]], "fa#-"], Labeled[Coordtord[[8]], "sol-"],
  Labeled[Coordtord[[9]], "lab-"], Labeled[Coordtord[[10]], "la-"],
  Labeled[Coordtord[[11]], "sib-"], Labeled[Coordtord[[12]], "si-"]};
```

Representació i visualització dels acords en l'espai

```
In[71]:= Puntstord = ListPointPlot3D[Coordtord, PlotStyle -> Directive[PointSize[0.02], Green]];
In[72]:= Puntstord2 = Show[Puntstord,
  Table[Graphics3D[Text[Coordtord2[[k]][[2]], 1.5 #] & /@ {Coordtord2[[k]][[1]]}],
  {k, 1, Length[Coordtord2]}], PlotRange -> Automatic];
In[73]:= Show[PuntsTorMm, Puntstord];
In[74]:= Show[PuntsTorMm2, Puntstord2];
```

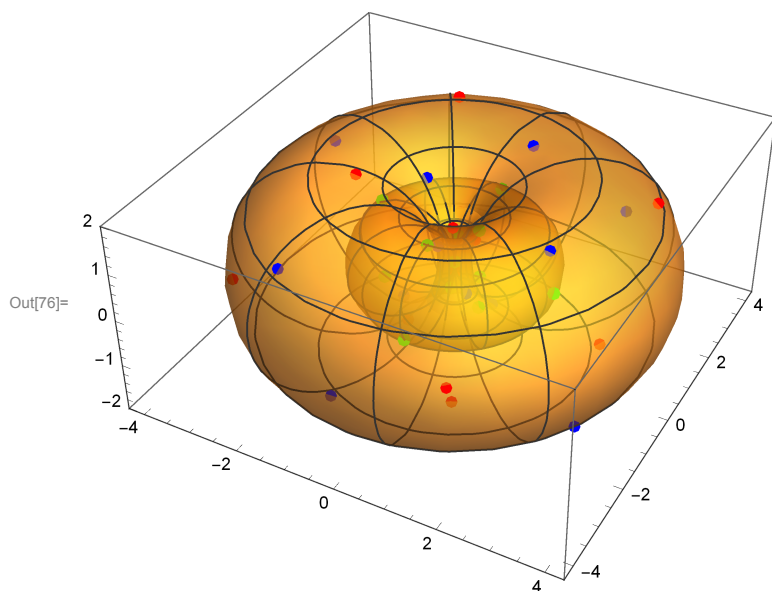
El tor disminuït

In[75]:= **Show[tord, Puntstord]**
[muestra](#)



El tor de les tonalitats Majors i menors i el tor disminuït

In[76]:= **Show[TorMm, PuntsTorMm, tord, Puntstord]**
[muestra](#)



Coordenades sobre el tor de les tonalitats Majors i menors

In[77]:= **CoordTord = Table[Tor[fasesd[[k]][[1]], fasesd[[k]][[2]], {k, 1, 12}];**
[tabla](#)

Representació dels acords sobre el tor de les tonalitats Majors i menors

Assignació del nom de l'acord a cada punt

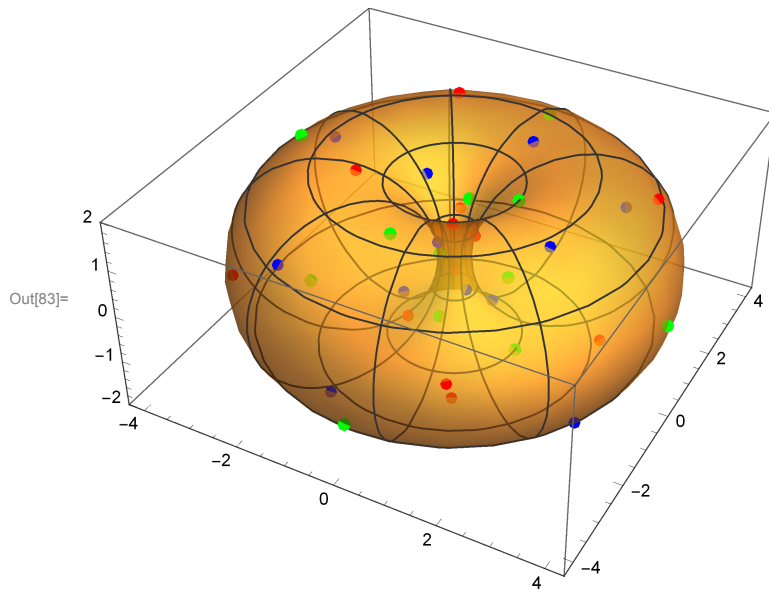
```
In[78]:= CoordTord2 = {Labeled[CoordTord[[1]], "do-"], Labeled[CoordTord[[2]], "reb-"],
  Labeled[CoordTord[[3]], "re-"], Labeled[CoordTord[[4]], "mib-"],
  Labeled[CoordTord[[5]], "mi-"], Labeled[CoordTord[[6]], "fa-"],
  Labeled[CoordTord[[7]], "fa#-"], Labeled[CoordTord[[8]], "sol-"],
  Labeled[CoordTord[[9]], "lab-"], Labeled[CoordTord[[10]], "la-"],
  Labeled[CoordTord[[11]], "sib-"], Labeled[CoordTord[[12]], "si-"]};
```

Representació i visualització dels acords en l'espai

```
In[79]:= PuntsTord = ListPointPlot3D[CoordTord, PlotStyle -> Directive[PointSize[0.02], Green]];
In[80]:= PuntsTord2 = Show[PuntsTord,
  Table[Graphics3D[Text[CoordTord2[[k]][[2]], 1.15 #] & /@ {CoordTord2[[k]][[1]]}],
  {k, 1, Length[CoordTord2]}];
In[81]:= PuntsTorMmd = Show[PuntsTorM, PuntsTorm, PuntsTord];
In[82]:= PuntsTorMmd2 = Show[PuntsTorM2, PuntsTorm2, PuntsTord2];
```

El tor de les tonalitats

In[83]:= `Show[TorMm, PuntsTorMmd, PlotRange -> Automatic]`
 [muestra] [rango de repre... [automático]



In[84]:= `Show[TorMm, PuntsTorMmd2, PlotRange -> Automatic];`
 [muestra] [rango de repre... [automático]

Camins entre acords

Distàncies entre acords

Definició de la distància

El tor pla de les tonalitats és un rectangle de costats L i l :

```
In[85]:= L = (R + r) * 2 Pi
          Lnúm
```

```
Out[85]= 26.1878
```

```
In[86]:= l = r * 2 Pi
          Lnúm
```

```
Out[86]= 12.1382
```

```
In[87]:= distancia[P_, Q_] :=
  Min[EuclideanDistance[P, Q], Sqrt[Min[Abs[P[[1]] - Q[[1]]], L - Abs[P[[1]] - Q[[1]]]^2 +
    Min[Abs[P[[2]] - Q[[2]]], l - Abs[P[[2]] - Q[[2]]]^2]]]
    Lmí... Ldistancia euclídea Lraíz... Lmí... Lvalor absoluto Lvalor absoluto
    Lmí... Lvalor absoluto Lvalor absoluto
```

Coordenades dels acords Majors, menors i disminuïts en el tor pla de les tonalitats

```
In[88]:= CoordPlaMmd = {CoordPlad[[1]], CoordPlam[[1]], CoordPlaM[[1]], CoordPlad[[2]],
  CoordPlam[[2]], CoordPlaM[[2]], CoordPlad[[3]], CoordPlam[[3]], CoordPlaM[[3]],
  CoordPlad[[4]], CoordPlam[[4]], CoordPlaM[[4]], CoordPlad[[5]], CoordPlam[[5]],
  CoordPlaM[[5]], CoordPlad[[6]], CoordPlam[[6]], CoordPlaM[[6]], CoordPlad[[7]],
  CoordPlam[[7]], CoordPlaM[[7]], CoordPlad[[8]], CoordPlam[[8]], CoordPlaM[[8]],
  CoordPlad[[9]], CoordPlam[[9]], CoordPlaM[[9]], CoordPlad[[10]],
  CoordPlam[[10]], CoordPlaM[[10]], CoordPlad[[11]], CoordPlam[[11]],
  CoordPlaM[[11]], CoordPlad[[12]], CoordPlam[[12]], CoordPlaM[[12]]};
```

```
In[89]:= TableForm[CoordPlaMmd,
  Lforma de tabla
  TableHeadings -> {"do dim", "do m", "Do M", "reb dim", "reb m", "Reb M", "re dim",
  Lcabeceras de tabla Lrepite
  "re m", "Re M", "mib dim", "mib m", "Mib M", "mi dim", "mi m", "Mi M",
  Lparte real
  "fa dim", "fa m", "Fa M", "fa dim#", "fa# m", "Fa# M", "sol dim", "sol m",
  "Sol M", "lab dim", "lab m", "Lab M", "la dim", "la m", "La M", "sib dim",
  "sib m", "Sib M", "si dim", "si m", "Si M"}, {"(R+r) arg(a3)", "r arg(a5)"}];
```

Distàncies entre acords Majors

```
In[90]:= DistanciesM = Table[distancia[CoordPlaM[x], CoordPlaM[y]],
      |tabla
      {x, 1, Length[CoordPlaM]}, {y, 1, Length[CoordPlaM]}};
      |longitud |longitud

In[91]:= TableForm[DistanciesM,
      |forma de tabla
      TableHeadings -> {"Do M", "Reb M", "Re M", "Mib M", "Mi M", "Fa M", "Fa# M",
      |cabeceras de tabla |repite |parte real
      "Sol M", "Lab M", "La M", "Sib M", "Si M"}, {"Do M", "Reb M", "Re M", "Mib M",
      |repite |parte real
      "Mi M", "Fa M", "Fa# M", "Sol M", "Lab M", "La M", "Sib M", "Si M"}];
```

Distància mínima entre acords Majors

```
In[92]:= DistanciesM2 = DistanciesM;

In[93]:= Table[DistanciesM2[[k]][[k]] = 100, {k, 1, Length[DistanciesM2]}};
      |tabla |longitud

In[94]:= Min[DistanciesM2]
      |mínimo

Out[94]:= 4.04606
```

Localització de les parelles d'acords entre les quals hi ha distància mínima

```
In[95]:= Union[Join[Table[DistanciesM2[[k]], {k, 1, Length[DistanciesM2]}]] // Flatten]
      |unión |junta |tabla |longitud |aplana

Out[95]:= {4.04606, 4.04606, 6.62463, 6.62463, 6.62463, 6.62463, 7.21603, 7.21603,
      7.21603, 8.27295, 8.27295, 8.27295, 13.2493, 13.2493, 14.4321, 14.4321, 100}

In[96]:= Position[DistanciesM2, Min[DistanciesM2]];
      |posición |mínimo

In[97]:= Position[DistanciesM2, Union[
      |posición |unión
      Join[Table[DistanciesM2[[k]], {k, 1, Length[DistanciesM2]}]] // Flatten][[2]]];
      |junta |tabla |longitud |aplana

In[98]:= DistanciesM2[[1]][[5]] - DistanciesM2[[1]][[9]]

Out[98]:= 8.88178 × 10-16
```

Considerem que dos números a distància més petita o igual que 10^{-15} són iguals.

Distàncies entre acords menors

```
In[99]:= Distanciesm = Table[distancia[CoordPlam[x], CoordPlam[y]],
      |tabla
      {x, 1, Length[CoordPlam]}, {y, 1, Length[CoordPlam]}};
      |longitud |longitud
```



```
In[100]:= TableForm[Distanciesm,
  forma de tabla
  TableHeadings -> {"do m", "reb m", "re m", "mib m", "mi m", "fa m", "fa# m",
  cabeceras de tabla
  "sol m", "lab m", "la m", "sib m", "si m"}, {"do m", "reb m", "re m", "mib m",
  "mi m", "fa m", "fa# m", "sol m", "lab m", "la m", "sib m", "si m"}];
```

Distància mínima entre acords menors

```
In[101]:= Distanciesm2 = Distanciesm;

In[102]:= Table[Distanciesm2[[k]][[k]] = 100, {k, 1, Length[Distanciesm2]}];
  tabla                                longitud

In[103]:= Min[Distanciesm2]
  mínimo

Out[103]= 4.04606
```

Localització de les parelles d'acords entre les quals hi ha distància mínima

```
In[104]:= Union[Join[Table[Distanciesm2[[k]], {k, 1, Length[Distanciesm2]}]] // Flatten];
  Unión  Junta  Tabla                                longitud                                Laplana

In[105]:= Position[Distanciesm2, Min[Distanciesm2]];
  Lposición                                Lmínimo

In[106]:= Position[Distanciesm2, Union[
  Lposición                                Lunión
  Join[Table[Distanciesm2[[k]], {k, 1, Length[Distanciesm2]}]] // Flatten][[2]]];
  Junta  Tabla                                longitud                                Laplana
```

Distàncies entre acords disminuïts

```
In[107]:= Distanciesd = Table[distancia[CoordPlad[[x]], CoordPlad[[y]]],
  tabla
  {x, 1, Length[CoordPlad]}, {y, 1, Length[CoordPlad]}];
  longitud                                longitud

In[108]:= TableForm[Distanciesd,
  forma de tabla
  TableHeadings -> {"do dim", "reb dim", "re dim", "mib dim", "mi dim",
  cabeceras de tabla
  "fa dim", "fa# dim", "sol dim", "lab dim", "la dim", "sib dim", "si dim"},
  {"do dim", "reb dim", "re dim", "mib dim", "mi dim", "fa dim",
  "fa# dim", "sol dim", "lab dim", "la dim", "sib dim", "si dim"}];
```

Distància mínima entre acords disminuïts

```
In[109]:= Distanciesd2 = Distanciesd;

In[110]:= Table[Distanciesd2[[k]][[k]] = 100, {k, 1, Length[Distanciesd2]}];
  tabla                                longitud
```

```
In[111]:= Min[Distanciesd2]
          Lmínimo
```

```
Out[111]= 4.04606
```

Localització de les parelles d'acords entre les quals hi ha distància mínima

```
In[112]:= Union[Join[Table[Distanciesd2[[k]], {k, 1, Length[Distanciesd2]}]] // Flatten];
          Lunió Ljunta Ltabla Llongitud Laplana
```

```
In[113]:= Position[Distanciesd2, Min[Distanciesd2]];
          Lposició Lmínimo
```

```
In[114]:= Position[Distanciesd2, Union[
          Lposició Lunió
          Join[Table[Distanciesd2[[k]], {k, 1, Length[Distanciesd2]}]] // Flatten][[2]]];
          Ljunta Ltabla Llongitud Laplana
```

```
In[115]:= Position[Distanciesd2, Union[
          Lposició Lunió
          Join[Table[Distanciesd2[[k]], {k, 1, Length[Distanciesd2]}]] // Flatten][[3]]];
          Ljunta Ltabla Llongitud Laplana
```

Distàncies entre acords Majors i acords menors

```
In[116]:= DistanciesMm = Table[distancia[CoordPlaMm[[x]], CoordPlaMm[[y]]],
          Ltabla
          {x, 1, Length[CoordPlaMm]}, {y, 1, Length[CoordPlaMm]}];
          Llongitud Llongitud
```

```
In[117]:= TableForm[DistanciesMm,
          Lforma de tabla
          TableHeadings -> {"do m", "Do M", "reb m", "Reb M", "re m", "Re M", "mib m",
          Lcabeceras de tabla Lrepite Lparte real
          "Mib M", "mi m", "Mi M", "fa m", "Fa M", "fa# m", "Fa# M", "sol m", "Sol M",
          "lab m", "Lab M", "la m", "La M", "sib m", "Sib M", "si m", "Si M"},
          {"do m", "Do M", "reb m", "Reb M", "re m", "Re M", "mib m", "Mib M",
          Lrepite Lparte real
          "mi m", "Mi M", "fa m", "Fa M", "fa# m", "Fa# M", "sol m", "Sol M",
          "lab m", "Lab M", "la m", "La M", "sib m", "Sib M", "si m", "Si M"}];
```

Distància mínima entre acords Majors i acords menors

```
In[118]:= DistanciesMm2 = DistanciesMm;
```

```
In[119]:= Table[DistanciesMm2[[k]][[k]] = 100, {k, 1, Length[DistanciesMm2]}];
          Ltabla Llongitud
```

```
In[120]:= Min[DistanciesMm2]
          Lmínimo
```

```
Out[120]= 3.35948
```

Localització de les parelles d'acords entre les quals hi ha distància mínima

```
In[121]:= Union[Join[Table[DistanciesMm2[[k]], {k, 1, Length[DistanciesMm2]}]] // Flatten];
          Lunió Ljunta Ltabla Llongitud Laplana
```

```

In[122]:= Position[DistanciesMm2, Min[DistanciesMm2]];
           Lposición           Lmínimo

In[123]:= Position[DistanciesMm2, Union[
           Lposición           Lunió
           Join[Table[DistanciesMm2[[k]], {k, 1, Length[DistanciesMm2]}] // Flatten][[2]]];
           Ljunta Ltabla           Llongitud           Laplana

In[124]:= Position[DistanciesMm2, Union[
           Lposición           Lunió
           Join[Table[DistanciesMm2[[k]], {k, 1, Length[DistanciesMm2]}] // Flatten][[3]]];
           Ljunta Ltabla           Llongitud           Laplana

```

Distàncies entre acords Majors, menors i disminuïts

```

In[125]:= DistanciesMmd = Table[distancia[CoordPlaMmd[[x]], CoordPlaMmd[[y]]],
           Ltabla
           {x, 1, Length[CoordPlaMmd]}, {y, 1, Length[CoordPlaMmd]}];
           Llongitud           Llongitud

In[126]:= TableForm[DistanciesMmd,
           Lforma de tabla
           TableHeadings -> {"do dim", "do m", "Do M", "reb dim", "reb m", "Reb M",
           Lcabeceras de tabla           Lrepite
           "re dim", "re m", "Re M", "mib dim", "mib m", "Mib M", "mi dim",
           Lparte real
           "mi m", "Mi M", "fa dim", "fa m", "Fa M", "fa dim#", "fa# m", "Fa# M",
           "sol dim", "sol m", "Sol M", "lab dim", "lab m", "Lab M", "la dim",
           "la m", "La M", "sib dim", "sib m", "Sib M", "si dim", "si m", "Si M"},
           {"do dim", "do m", "Do M", "reb dim", "reb m", "Reb M", "re dim",
           Lrepite
           "re m", "Re M", "mib dim", "mib m", "Mib M", "mi dim", "mi m", "Mi M",
           Lparte real
           "fa dim", "fa m", "Fa M", "fa dim#", "fa# m", "Fa# M", "sol dim",
           "sol m", "Sol M", "lab dim", "lab m", "Lab M", "la dim", "la m",
           "La M", "sib dim", "sib m", "Sib M", "si dim", "si m", "Si M"}];

```

Distància mínima entre acords Majors, menors i disminuïts

```

In[127]:= DistanciesMmd2 = DistanciesMmd;

In[128]:= Table[DistanciesMmd2[[k]][[k]] = 100, {k, 1, Length[DistanciesMmd2]}];
           Ltabla           Llongitud

In[129]:= Min[DistanciesMmd2]
           Lmínimo

Out[129]= 2.45692

```

Localització de les parelles d'acords entre les quals hi ha distància mínima

```

In[130]:= Union[Join[Table[DistanciesMmd2[[k]], {k, 1, Length[DistanciesMmd2]}] // Flatten];
           Lunió Ljunta Ltabla           Llongitud           Laplana

In[131]:= Position[DistanciesMmd2, Min[DistanciesMmd2]];
           Lposición           Lmínimo

```

```

In[132]:= Position[DistanciesMmd2,
  Lposición
    Union[Join[Table[DistanciesMmd2[[k]], {k, 1, Length[DistanciesMmd2]}]] // Flatten][[
      Lunió   Ljunta  Ltabla                                Llongitud                                Laplana
      2]]];

In[133]:= Position[DistanciesMmd2,
  Lposición
    Union[Join[Table[DistanciesMmd2[[k]], {k, 1, Length[DistanciesMmd2]}]] // Flatten][[
      Lunió   Ljunta  Ltabla                                Llongitud                                Laplana
      3]]];

In[134]:= Position[DistanciesMmd2,
  Lposición
    Union[Join[Table[DistanciesMmd2[[k]], {k, 1, Length[DistanciesMmd2]}]] // Flatten][[
      Lunió   Ljunta  Ltabla                                Llongitud                                Laplana
      4]]];

In[135]:= Position[DistanciesMmd2,
  Lposición
    Union[Join[Table[DistanciesMmd2[[k]], {k, 1, Length[DistanciesMmd2]}]] // Flatten][[
      Lunió   Ljunta  Ltabla                                Llongitud                                Laplana
      5]]];

In[136]:= Position[DistanciesMmd2,
  Lposición
    Union[Join[Table[DistanciesMmd2[[k]], {k, 1, Length[DistanciesMmd2]}]] // Flatten][[
      Lunió   Ljunta  Ltabla                                Llongitud                                Laplana
      6]]];

In[137]:= Position[DistanciesMmd2,
  Lposición
    Union[Join[Table[DistanciesMmd2[[k]], {k, 1, Length[DistanciesMmd2]}]] // Flatten][[
      Lunió   Ljunta  Ltabla                                Llongitud                                Laplana
      7]]];

In[138]:= Position[DistanciesMmd2,
  Lposición
    Union[Join[Table[DistanciesMmd2[[k]], {k, 1, Length[DistanciesMmd2]}]] // Flatten][[
      Lunió   Ljunta  Ltabla                                Llongitud                                Laplana
      8]]];

In[139]:= Position[DistanciesMmd2,
  Lposición
    Union[Join[Table[DistanciesMmd2[[k]], {k, 1, Length[DistanciesMmd2]}]] // Flatten][[
      Lunió   Ljunta  Ltabla                                Llongitud                                Laplana
      9]]];

In[140]:= Position[DistanciesMmd2,
  Lposición
    Union[Join[Table[DistanciesMmd2[[k]], {k, 1, Length[DistanciesMmd2]}]] // Flatten][[
      Lunió   Ljunta  Ltabla                                Llongitud                                Laplana
      10]]];

```

Així doncs, els tres valors més petits que pren la distància entre acords de modes diferents són els que veiem a continuació, anomenats Pes1, Pes2 i Pes3.

Anomenem Pes4 al valor més petit que pren la distància entre acords del mateix mode.

```

In[141]:= Pes1 = Min[DistanciesMmd2]
           |mínimo
Out[141]= 2.45692

In[142]:= Pes2 = Union[Join[Table[DistanciesMmd2[[k]], {k, 1, Length[DistanciesMmd2]}]] //
           |unión |junta |tabla |longitud
           Flatten][[5]]
           |aplana
Out[142]= 3.18263

In[143]:= Pes3 = Min[DistanciesMm2]
           |mínimo
Out[143]= 3.35948

In[144]:= Pes4 = Min[DistanciesM2]
           |mínimo
Out[144]= 4.04606

```

Camins entre acords. Representació de les modulacions

Modulacions sense acords de pas

Cicles monomodals Majors

```

In[145]:= CiclesM = Graph[{DO ↔ MI, DO ↔ LAB, REb ↔ FA, REb ↔ LA, RE ↔ FA#, RE ↔ SIB, MIB ↔ SOL,
           |Lgrafó
           MIB ↔ SI, MI ↔ LAB, FA ↔ LA, FA# ↔ SIB, SOL ↔ SI}, VertexLabels → "Name"];
           |etiquetas de vértices

```

Cicles monomodals menors

```

In[146]:= Ciclesm = Graph[{do ↔ mi, do ↔ lab, reb ↔ fa, reb ↔ la, re ↔ fa#, re ↔ sib, mib ↔ sol,
           |Lgrafó
           mib ↔ si, mi ↔ lab, fa ↔ la, fa# ↔ sib, sol ↔ si}, VertexLabels → "Name"];
           |etiquetas de vértices

```

Cicles monomodals disminuïts

```

In[147]:= Ciclesd = Graph[{"do-" ↔ "mi-", "do-" ↔ "lab-", "reb-" ↔ "fa-", "reb-" ↔ "la-",
           |Lgrafó
           "re-" ↔ "fa#", "re-" ↔ "sib-", "mib-" ↔ "sol-", "mib-" ↔ "si-", "mi-" ↔ "lab-",
           "fa-" ↔ "la-", "fa#" ↔ "sib-", "sol-" ↔ "si-"}, VertexLabels → "Name"];
           |etiquetas de vértices

```

Cicles bimodals (Grafs de Pes 3)

```
In[148]:= CiclesMm = Graph[{do ↔ DO, do ↔ LAb, DO ↔ mi, reb ↔ REb, reb ↔ LA,
  Lgrafa
  REb ↔ fa, re ↔ RE, re ↔ SIb, RE ↔ fa#, mib ↔ Mib, mib ↔ SI, Mib ↔ sol,
  mi ↔ MI, MI ↔ lab, fa ↔ FA, FA ↔ la, fa# ↔ FA#, FA# ↔ sib, sol ↔ SOL,
  SOL ↔ si, lab ↔ LAb, la ↔ LA, sib ↔ SIb, si ↔ SI}, VertexLabels → "Name"];
  Letiquetas de vértices
```

Modulacions amb acords de pas

Grafs de Pes 1

```
In[149]:= Graph[{"do~" ↔ Mib, "do~" ↔ lab, do ↔ "mi~", DO ↔ "la~", "reb~" ↔ MI,
  Lgrafa
  "reb~" ↔ la, REb ↔ "sib~", "re~" ↔ FA, "re~" ↔ sib, RE ↔ "si~", "mib~" ↔ FA#,
  "mib~" ↔ si, mib ↔ "sol~", "mi~" ↔ SOL, mi ↔ "lab~", "fa~" ↔ LAb,
  "fa~" ↔ reb, fa ↔ "la~", "fa#" ↔ LA, "fa#" ↔ re, fa# ↔ "sib~",
  "sol~" ↔ SIb, sol ↔ "si~", "lab~" ↔ SI}, VertexLabels → "Name"];
  Letiquetas de vértices
```

Grafs de Pes 2

```
In[150]:= Graph[{"do~" ↔ do, "do~" ↔ SI, DO ↔ "reb~", "reb~" ↔ reb, REb ↔ "re~",
  Lgrafa
  "re~" ↔ re, RE ↔ "mib~", "mib~" ↔ mib, Mib ↔ "mi~", "mi~" ↔ mi, MI ↔ "fa~",
  "fa~" ↔ fa, FA ↔ "fa#" ↔ fa#, FA# ↔ "sol~", "sol~" ↔ sol,
  SOL ↔ "lab~", "lab~" ↔ lab, LAb ↔ "la~", "la~" ↔ la, LA ↔ "sib~",
  "sib~" ↔ sib, SIb ↔ "si~", "si~" ↔ si}, VertexLabels → "Name"];
  Letiquetas de vértices
```

Grafs de Pesos 1 i 2

```
In[151]:= GrafPes12 =
  Lgrafa
  Graph[{"do~" ↔ do, "do~" ↔ Mib, "do~" ↔ lab, "do~" ↔ SI, do ↔ "mi~", DO ↔ "reb~",
  DO ↔ "la~", "reb~" ↔ reb, "reb~" ↔ MI, "reb~" ↔ la, reb ↔ "fa~", REb ↔ "re~",
  REb ↔ "sib~", "re~" ↔ re, "re~" ↔ FA, "re~" ↔ sib, re ↔ "fa#" ↔ fa#, RE ↔ "mib~",
  RE ↔ "si~", "mib~" ↔ mib, "mib~" ↔ FA#, "mib~" ↔ si, mib ↔ "sol~",
  Mib ↔ "mi~", "mi~" ↔ mi, "mi~" ↔ SOL, mi ↔ "lab~", MI ↔ "fa~", "fa~" ↔ fa,
  "fa~" ↔ LAb, fa ↔ "la~", FA ↔ "fa#" ↔ fa#, "fa#" ↔ fa#, "fa#" ↔ LA,
  fa# ↔ "sib~", FA# ↔ "sol~", "sol~" ↔ sol, "sol~" ↔ SIb, sol ↔ "si~",
  SOL ↔ "lab~", "lab~" ↔ lab, "lab~" ↔ SI, LAb ↔ "la~", "la~" ↔ la,
  LA ↔ "sib~", "sib~" ↔ sib, SIb ↔ "si~", "si~" ↔ si}, VertexLabels → "Name"];
  Letiquetas de vértices
```

Graf Hamiltonià de Pesos 1 i 3

```
In[152]:= GrafPes13 =
  Graph[{"do" ↔ Mib, "do" ↔ lab, do ↔ "mi", DO ↔ "la", "reb" ↔ MI, "reb" ↔ la,
    Lgrafo
    REb ↔ "sib", "re" ↔ FA, "re" ↔ sib, RE ↔ "si", "mib" ↔ FA#, "mib" ↔ si,
    mib ↔ "sol", "mi" ↔ SOL, mi ↔ "lab", "fa" ↔ LAb, "fa" ↔ reb, fa ↔ "la",
    "fa#" ↔ LA, "fa#" ↔ re, fa# ↔ "sib", "sol" ↔ Sib, sol ↔ "si",
    "lab" ↔ SI, do ↔ DO, do ↔ LAb, DO ↔ mi, reb ↔ REb, reb ↔ LA, REb ↔ fa,
    re ↔ RE, re ↔ Sib, RE ↔ fa#, mib ↔ Mib, mib ↔ SI, Mib ↔ sol, mi ↔ MI,
    MI ↔ lab, fa ↔ FA, FA ↔ la, fa# ↔ FA#, FA# ↔ sib, sol ↔ SOL, SOL ↔ si,
    lab ↔ LAb, la ↔ LA, sib ↔ Sib, si ↔ SI}, VertexLabels → "Name"];
    Letiquetas de vértices
```

```
In[153]:= HamiltonianGraphQ[GrafPes13]
Lgrafo hamiltoniano?
```

```
Out[153]:= True
```

```
In[154]:= FindHamiltonianCycle[GrafPes13]
Lencuentra ciclo hamiltoniano
```

```
Out[154]:= {{do ↔ Mib, Mib ↔ sol, sol ↔ si, si ↔ RE, RE ↔ fa#, fa# ↔ sib, sib ↔ REb,
  REb ↔ fa, fa ↔ la, la ↔ DO, DO ↔ mi, mi ↔ lab, lab ↔ SI, SI ↔ mib, mib ↔ sol,
  sol ↔ Sib, Sib ↔ re, re ↔ fa#, fa# ↔ LA, LA ↔ reb, reb ↔ fa, fa ↔ LAb,
  LAb ↔ do, do ↔ mi, mi ↔ SOL, SOL ↔ si, si ↔ mib, mib ↔ FA#, FA# ↔ sib,
  sib ↔ re, re ↔ FA, FA ↔ la, la ↔ reb, reb ↔ MI, MI ↔ lab, lab ↔ do}}
```

Graf Hamiltonià de Pesos 2 i 3

```
In[155]:= GrafPes23 = Graph[{"do" ↔ do, "do" ↔ SI, DO ↔ "reb", "reb" ↔ reb, REb ↔ "re",
  Lgrafo
  "re" ↔ re, RE ↔ "mib", "mib" ↔ mib, Mib ↔ "mi", "mi" ↔ mi, MI ↔ "fa",
  "fa" ↔ fa, FA ↔ "fa#", "fa#" ↔ fa#, FA# ↔ "sol", "sol" ↔ sol,
  SOL ↔ "lab", "lab" ↔ lab, LAb ↔ "la", "la" ↔ la, LA ↔ "sib", "sib" ↔ sib,
  Sib ↔ "si", "si" ↔ si, do ↔ DO, do ↔ LAb, DO ↔ mi, reb ↔ REb, reb ↔ LA,
  REb ↔ fa, re ↔ RE, re ↔ Sib, RE ↔ fa#, mib ↔ Mib, mib ↔ SI, Mib ↔ sol,
  mi ↔ MI, MI ↔ lab, fa ↔ FA, FA ↔ la, fa# ↔ FA#, FA# ↔ sib, sol ↔ SOL,
  SOL ↔ si, lab ↔ LAb, la ↔ LA, sib ↔ Sib, si ↔ SI}, VertexLabels → "Name"];
  Letiquetas de vértices
```

```
In[156]:= HamiltonianGraphQ[GrafPes23]
Lgrafo hamiltoniano?
```

```
Out[156]:= True
```

```
In[157]:= FindHamiltonianCycle[GrafPes23]
Lencuentra ciclo hamiltoniano
```

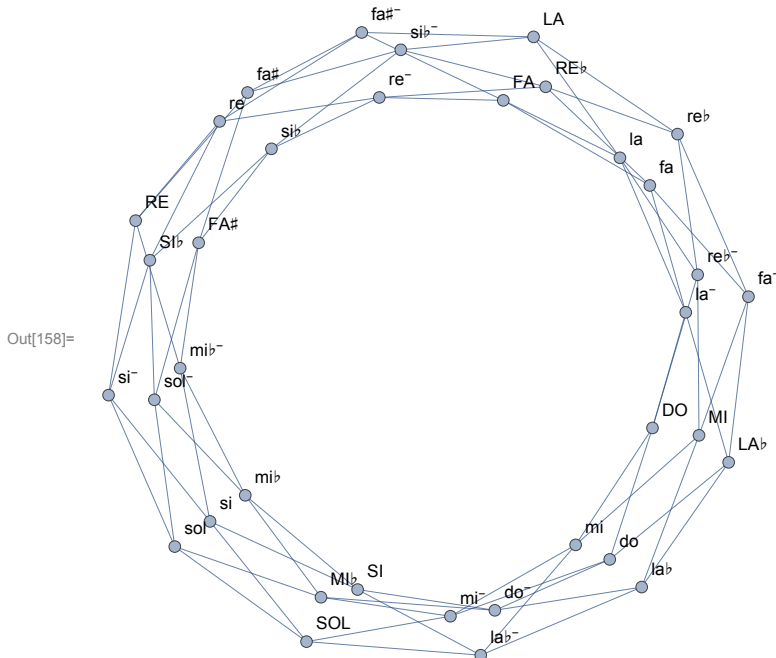
```
Out[157]:= {{do ↔ do, do ↔ LAb, LAb ↔ la, la ↔ la, la ↔ LA, LA ↔ sib, sib ↔ sib, sib ↔ Sib,
  Sib ↔ si, si ↔ si, si ↔ SOL, SOL ↔ lab, lab ↔ lab, lab ↔ MI, MI ↔ fa,
  fa ↔ fa, fa ↔ FA, FA ↔ fa#, fa# ↔ fa#, fa# ↔ FA#, FA# ↔ sol, sol ↔ sol,
  sol ↔ Mib, Mib ↔ mi, mi ↔ mi, mi ↔ DO, DO ↔ reb, reb ↔ reb, reb ↔ REb,
  REb ↔ re, re ↔ re, re ↔ RE, RE ↔ mib, mib ↔ mib, mib ↔ SI, SI ↔ do}}
```

Graf Hamiltonià de les tríades (de Pesos 1, 2 i 3)

In[158]:= **GrafHamilton** =

```
Graph[{"do" ↔ do, "do" ↔ Mib, "do" ↔ lab, "do" ↔ SI, do ↔ DO, do ↔ "mi", do ↔ LAb,
  DO ↔ "reb", DO ↔ mi, DO ↔ "la", "reb" ↔ reb, "reb" ↔ MI, "reb" ↔ la, reb ↔ REb,
  reb ↔ "fa", reb ↔ LA, REb ↔ "re", REb ↔ fa, REb ↔ "sib", "re" ↔ re, "re" ↔ FA,
  "re" ↔ sib, re ↔ RE, re ↔ "fa#", re ↔ Sib, RE ↔ "mib", RE ↔ fa#, RE ↔ "si",
  "mib" ↔ mib, "mib" ↔ FA#, "mib" ↔ si, mib ↔ Mib, mib ↔ "sol", mib ↔ SI,
  Mib ↔ "mi", Mib ↔ sol, "mi" ↔ mi, "mi" ↔ SOL, mi ↔ MI, mi ↔ "lab", MI ↔ "fa",
  MI ↔ lab, "fa" ↔ fa, "fa" ↔ LAb, fa ↔ FA, fa ↔ "la", FA ↔ "fa#", FA ↔ la,
  "fa#" ↔ fa#, "fa#" ↔ LA, fa# ↔ FA#, fa# ↔ "sib", FA# ↔ "sol", FA# ↔ sib,
  "sol" ↔ sol, "sol" ↔ Sib, sol ↔ SOL, sol ↔ "si", SOL ↔ "lab", SOL ↔ si,
  "lab" ↔ lab, "lab" ↔ SI, lab ↔ LAb, LAb ↔ "la", "la" ↔ la, la ↔ LA, LA ↔ "sib",
  "sib" ↔ sib, sib ↔ Sib, Sib ↔ "si", "si" ↔ si, si ↔ SI}, VertexLabels → "Name"]
```

Letiquetas de vértices



In[159]:= **HamiltonianGraphQ**[GrafHamilton]

↳ grafo hamiltoniano?

Out[159]= True

In[160]:= **FindHamiltonianCycle**[GrafHamilton]

↳ encuentra ciclo hamiltoniano

Out[160]= {{do ↔ lab, lab ↔ lab⁻, lab⁻ ↔ mi, mi ↔ DO, DO ↔ la⁻, la⁻ ↔ fa, fa ↔ FA, FA ↔ la, la ↔ reb⁻, reb⁻ ↔ MI, MI ↔ fa⁻, fa⁻ ↔ LAb, LAb ↔ do, do ↔ mi⁻, mi⁻ ↔ SOL, SOL ↔ sol, sol ↔ Mib, Mib ↔ mib, mib ↔ sol⁻, sol⁻ ↔ Sib, Sib ↔ si⁻, si⁻ ↔ RE, RE ↔ fa#, fa# ↔ sib⁻, sib⁻ ↔ REb, REb ↔ reb, reb ↔ LA, LA ↔ fa#, fa# ↔ re, re ↔ re⁻, re⁻ ↔ sib, sib ↔ FA#, FA# ↔ mib⁻, mib⁻ ↔ si, si ↔ SI, SI ↔ do}}

Meridians tonals

Els punts geodèsics

Per a cada un dels 12 meridians, definirem punts que pertanyen a cada un d'ells i els anomenarem **punts geodèsics**.

Coordenades en el pla dels punts geodèsics

```
In[161]:= CoordGPlam = {CoordGPlaDo, CoordGPlaFa, CoordGPlaRe, CoordGPlaSol} =  
          Table[{fasesM[[k, 1]], 0}, {k, 1, 4}];  
          \[tabla\]  
  
In[162]:= CoordGPlam = {CoordGPlado, CoordGPlafa, CoordGPlare, CoordGPlasol} =  
          Table[{fasesm[[k, 1]], 0}, {k, 1, 4}];  
          \[tabla\]  
  
In[163]:= CoordGPlad = {CoordGPladod, CoordGPlafad, CoordGPlared, CoordGPlasold} =  
          Table[{fasesd[[k, 1]], 0}, {k, 1, 4}];  
          \[tabla\]
```

Coordenades en l'espai dels punts geodèsics

```
In[164]:= CoordGTorM = {CoordGTorDo, CoordGTorFa, CoordGTorRe, CoordGTorSol} =  
          Table[{Tor[CoordGPlam[[k, 1]], CoordGPlam[[k, 2]]], {k, 1, Length[CoordGPlam]}}];  
          \[tabla\] \[longitud\]  
  
In[165]:= CoordGTorm = {CoordGTordo, CoordGTorfa, CoordGTorre, CoordGTorsol} =  
          Table[{Tor[CoordGPlam[[k, 1]], CoordGPlam[[k, 2]]], {k, 1, Length[CoordGPlam]}}];  
          \[tabla\] \[longitud\]  
  
In[166]:= CoordGTord = {CoordGTordod, CoordGTorfad, CoordGTorred, CoordGTorsold} =  
          Table[{Tor[CoordGPlad[[k, 1]], CoordGPlad[[k, 2]]], {k, 1, Length[CoordGPlad]}}];  
          \[tabla\] \[longitud\]
```

Els acords dels meridians

Coordenades en l'espai dels 3 acords que pertanyen a cada un dels meridians

```
In[167]:= AcordsGDo = Table[Tor[fasesM[[k]][[1]], fasesM[[k]][[2]]], {k, 1, 12, 4}];  
          \[tabla\]  
  
In[168]:= AcordsGdo = Table[Tor[fasesm[[k]][[1]], fasesm[[k]][[2]]], {k, 1, 12, 4}];  
          \[tabla\]  
  
In[169]:= AcordsGdod = Table[Tor[fasesd[[k]][[1]], fasesd[[k]][[2]]], {k, 1, 12, 4}];  
          \[tabla\]
```

```

In[170]:= AcordsGRE = Table[Tor[fasesM[[k]][[1]], fasesM[[k]][[2]]], {k, 3, 12, 4}];
           |tabla

In[171]:= AcordsGre = Table[Tor[fasesm[[k]][[1]], fasesm[[k]][[2]]], {k, 3, 12, 4}];
           |tabla

In[172]:= AcordsGred = Table[Tor[fasesd[[k]][[1]], fasesd[[k]][[2]]], {k, 3, 12, 4}];
           |tabla

In[173]:= AcordsGFa = Table[Tor[fasesM[[k]][[1]], fasesM[[k]][[2]]], {k, 2, 12, 4}];
           |tabla

In[174]:= AcordsGfa = Table[Tor[fasesm[[k]][[1]], fasesm[[k]][[2]]], {k, 2, 12, 4}];
           |tabla

In[175]:= AcordsGfad = Table[Tor[fasesd[[k]][[1]], fasesd[[k]][[2]]], {k, 2, 12, 4}];
           |tabla

In[176]:= AcordsGSol = Table[Tor[fasesM[[k]][[1]], fasesM[[k]][[2]]], {k, 4, 12, 4}];
           |tabla

In[177]:= AcordsGsol = Table[Tor[fasesm[[k]][[1]], fasesm[[k]][[2]]], {k, 4, 12, 4}];
           |tabla

In[178]:= AcordsGsold = Table[Tor[fasesd[[k]][[1]], fasesd[[k]][[2]]], {k, 4, 12, 4}];
           |tabla

```

Representació en l'espai d'aquests acords

```

In[179]:= PuntsGDo = ListPointPlot3D[AcordsGDo, PlotStyle -> Directive[{PointSize[0.025], Red}]];
           |representació 3D en punts de lista |estilo de repre... |directiva |tamaño de punto |rojo

In[180]:= PuntsGdo = ListPointPlot3D[AcordsGdo, PlotStyle -> Directive[{PointSize[0.025], Blue}]];
           |representació 3D en punts de lista |estilo de repre... |directiva |tamaño de punto |azul

In[181]:= PuntsGdod =
           ListPointPlot3D[AcordsGdod, PlotStyle -> Directive[{PointSize[0.025], Green}]];
           |representació 3D en punts de lista |estilo de repre... |directiva |tamaño de punto |verde

In[182]:= PuntsGRE = ListPointPlot3D[AcordsGRE, PlotStyle -> Directive[{PointSize[0.025], Red}]];
           |representació 3D en punts de lista |estilo de repre... |directiva |tamaño de punto |rojo

In[183]:= PuntsGre = ListPointPlot3D[AcordsGre, PlotStyle -> Directive[{PointSize[0.025], Blue}]];
           |representació 3D en punts de lista |estilo de repre... |directiva |tamaño de punto |azul

In[184]:= PuntsGred =
           ListPointPlot3D[AcordsGred, PlotStyle -> Directive[{PointSize[0.025], Green}]];
           |representació 3D en punts de lista |estilo de repre... |directiva |tamaño de punto |verde

In[185]:= PuntsGFa = ListPointPlot3D[AcordsGFa, PlotStyle -> Directive[{PointSize[0.025], Red}]];
           |representació 3D en punts de lista |estilo de repre... |directiva |tamaño de punto |rojo

In[186]:= PuntsGfa = ListPointPlot3D[AcordsGfa, PlotStyle -> Directive[{PointSize[0.025], Blue}]];
           |representació 3D en punts de lista |estilo de repre... |directiva |tamaño de punto |azul

In[187]:= PuntsGfad =
           ListPointPlot3D[AcordsGfad, PlotStyle -> Directive[{PointSize[0.025], Green}]];
           |representació 3D en punts de lista |estilo de repre... |directiva |tamaño de punto |verde

In[188]:= PuntsGSol = ListPointPlot3D[AcordsGSol, PlotStyle -> Directive[{PointSize[0.025], Red}]];
           |representació 3D en punts de lista |estilo de repre... |directiva |tamaño de punto |rojo

```

```

In[189]:= PuntsGsol =
  ListPointPlot3D[AcordsGsol, PlotStyle → Directive[{PointSize[0.025], Blue}]];
  representación 3D en puntos de lista Estilo de repre... directiva tamaño de punto azul

In[190]:= PuntsGsold =
  ListPointPlot3D[AcordsGsold, PlotStyle → Directive[{PointSize[0.025], Green}]];
  representación 3D en puntos de lista Estilo de repre... directiva tamaño de punto verde

```

Meridians del tor

Definició dels meridians

```

In[191]:= Meridian[u_, v_] := {(R + r Cos[v]) Cos[u], (R + r Cos[v]) Sin[u], r Sin[v]}
  coseno coseno coseno seno seno

In[192]:= TorMn0 = ParametricPlot3D[Tor[u, v],
  gráfico paramétrico 3D
  {u, 0, 2 * Pi}, {v, 0, 2 * Pi}, PlotStyle → Opacity[0.6], Mesh → 0];
  número pi número Estilo de repre... Opacidad mallla

```

Representació dels meridians en l'espai

```

In[193]:= GDo = ParametricPlot3D[Meridian[CoordGPlaDo[[1]], v],
  gráfico paramétrico 3D
  {v, 0, 2 * Pi}, Axes → None, PlotStyle → Directive[Red, Opacity[0.7]]];
  número Lejes ninguno Estilo de repre... directiva rojo Opacidad

In[194]:= Gdo = ParametricPlot3D[Meridian[CoordGPLado[[1]], v], {v, 0, 2 * Pi}, Axes → None];
  gráfico paramétrico 3D número Lejes ninguno

In[195]:= Gdod = ParametricPlot3D[Meridian[CoordGPLadod[[1]], v],
  gráfico paramétrico 3D
  {v, 0, 2 * Pi}, Axes → None, PlotStyle → Directive[Green, Opacity[0.6]]];
  número Lejes ninguno Estilo de repre... directiva verde Opacidad

In[196]:= Show[GDo, Gdo, Gdod, PlotRange → Automatic];
  muestra rango de repr... automático

In[197]:= GRE = ParametricPlot3D[Meridian[CoordGPLaRe[[1]], v],
  gráfico paramétrico 3D
  {v, 0, 2 * Pi}, Axes → None, PlotStyle → Directive[Red, Opacity[0.7]]];
  número Lejes ninguno Estilo de repre... directiva rojo Opacidad

In[198]:= Gre = ParametricPlot3D[Meridian[CoordGPLare[[1]], v], {v, 0, 2 * Pi}, Axes → None];
  gráfico paramétrico 3D número Lejes ninguno

In[199]:= Gred = ParametricPlot3D[Meridian[CoordGPLared[[1]], v],
  gráfico paramétrico 3D
  {v, 0, 2 * Pi}, Axes → None, PlotStyle → Directive[Green, Opacity[0.6]]];
  número Lejes ninguno Estilo de repre... directiva verde Opacidad

In[200]:= GFa = ParametricPlot3D[Meridian[CoordGPLaFa[[1]], v],
  gráfico paramétrico 3D
  {v, 0, 2 * Pi}, Axes → None, PlotStyle → Directive[Red, Opacity[0.7]]];
  número Lejes ninguno Estilo de repre... directiva rojo Opacidad

In[201]:= Gfa = ParametricPlot3D[Meridian[CoordGPLafa[[1]], v], {v, 0, 2 * Pi}, Axes → None];
  gráfico paramétrico 3D número Lejes ninguno

```

```

In[202]:= Gfad = ParametricPlot3D[Meridian[CoordGPlafad[[1]], v],
      \[gráfico paramétrico 3D\]
      {v, 0, 2 * Pi}, Axes → None, PlotStyle → Directive[Green, Opacity[0.6]]];
      \[número... ejes\] \[ninguno... estilo de repre...\] \[directiva\] \[verde\] \[opacidad\]

In[203]:= GSol = ParametricPlot3D[Meridian[CoordGPlaSol[[1]], v],
      \[gráfico paramétrico 3D\]
      {v, 0, 2 * Pi}, Axes → None, PlotStyle → Directive[Red, Opacity[0.7]]];
      \[número... ejes\] \[ninguno... estilo de repre...\] \[directiva\] \[rojo\] \[opacidad\]

In[204]:= Gsol = ParametricPlot3D[Meridian[CoordGPlasol[[1]], v], {v, 0, 2 * Pi}, Axes → None];
      \[gráfico paramétrico 3D\] \[número... ejes\] \[ninguno\]

In[205]:= Gsold = ParametricPlot3D[Meridian[CoordGPlasold[[1]], v],
      \[gráfico paramétrico 3D\]
      {v, 0, 2 * Pi}, Axes → None, PlotStyle → Directive[Green, Opacity[0.6]]];
      \[número... ejes\] \[ninguno... estilo de repre...\] \[directiva\] \[verde\] \[opacidad\]

```

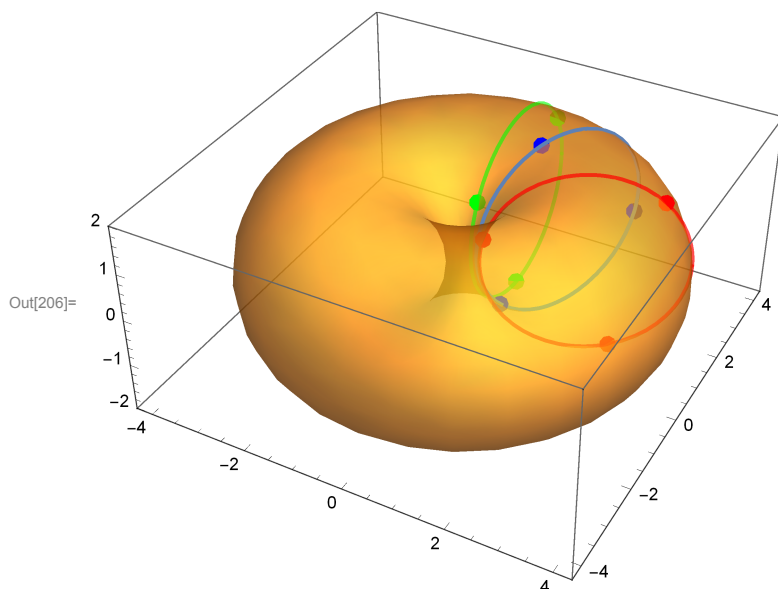
Representació dels meridians sobre el tor

Meridians amb els mateixos acords però diferent mode

```

In[206]:= Show[TorMm0, PuntsGDo, PuntsGdo, PuntsGdod, GDo, Gdo, Gdod]
      \[muestra\]

```



```

In[207]:= Show[TorMm0, PuntsGRe, PuntsGre, PuntsGred, GRe, Gre, Gred];
      \[muestra\]

```

```

In[208]:= Show[TorMm0, PuntsGFa, PuntsGfa, PuntsGfad, GFa, Gfa, Gfad];
      \[muestra\]

```

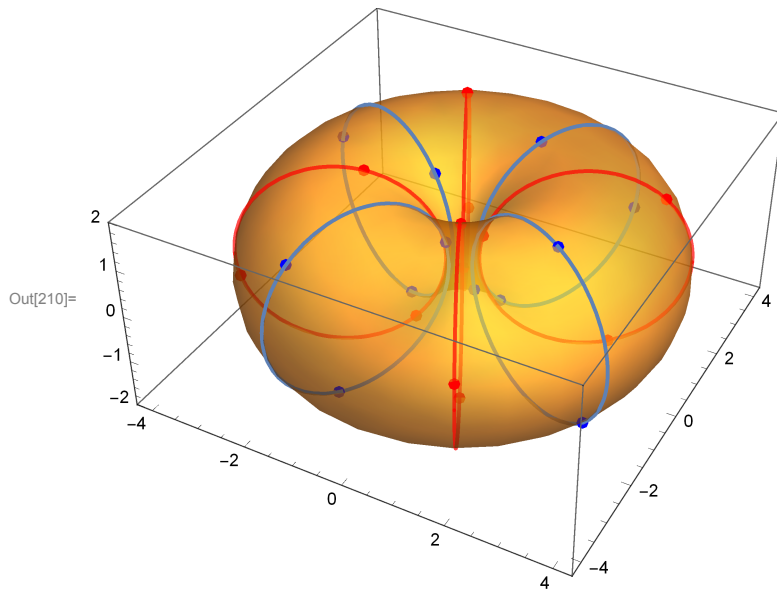
```

In[209]:= Show[TorMm0, PuntsGSol, PuntsGsol, PuntsGsold, GSol, Gsol, Gsold];
      \[muestra\]

```

Meridians Majors i meridians menors

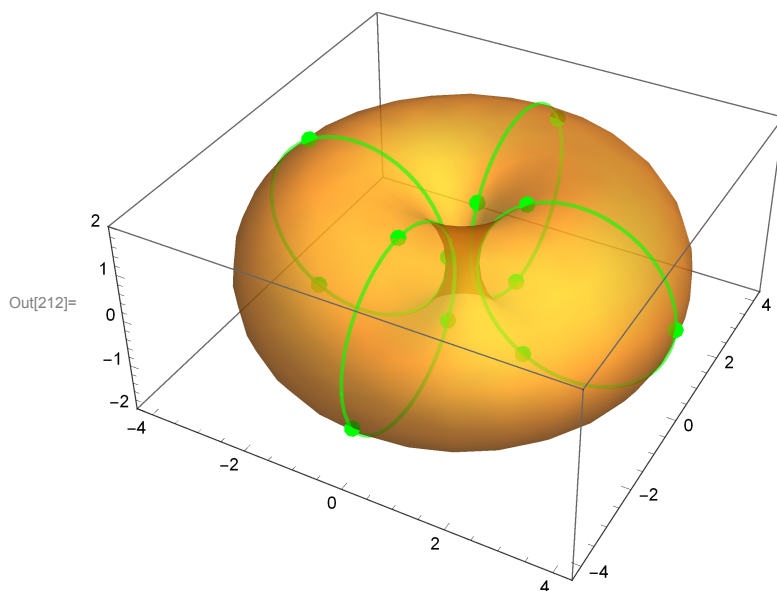
In[210]:= `Show[TorMm0, PuntsTorMm, GDo, Gdo, GRe, Gre, GFa, Gfa, GSol, Gsol, PlotRange -> Automatic]`
[\[muestra\]](#) [\[rango de repre...\]](#) [\[automático\]](#)



In[211]:= `Show[TorMm0, PuntsTorMm2, GDo, Gdo, GRe, Gre, GFa, Gfa, GSol, Gsol, PlotRange -> Automatic];`
[\[muestra\]](#) [\[rango de repre...\]](#) [\[automático\]](#)

Meridians disminuïts

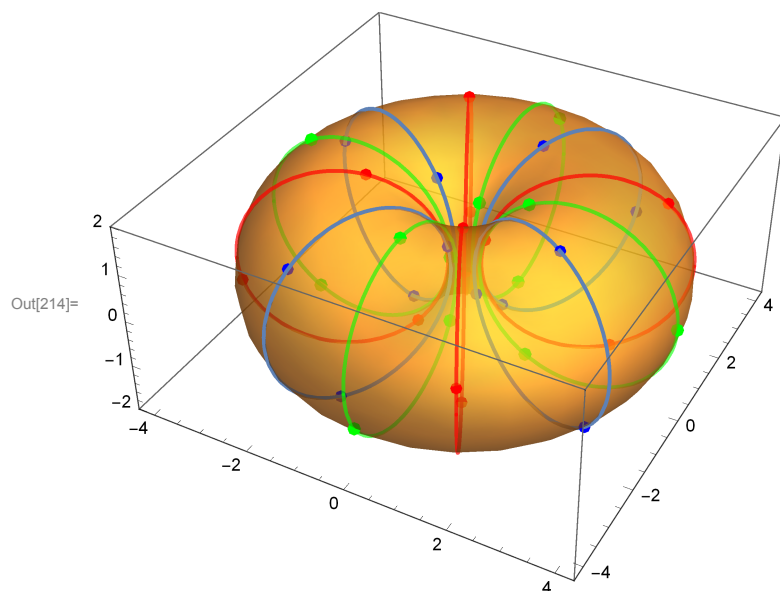
In[212]:= `Show[TorMm0, PuntsGdod, PuntsGred, PuntsGfad, PuntsGsold, Gdod, Gred, Gfad, Gsold]`
[\[muestra\]](#)



In[213]:= `Show[TorMm0, PuntsTord2, Gdod, Gred, Gfad, Gsold, PlotRange -> Automatic];`
[\[muestra\]](#) [\[rango de repre...\]](#) [\[automático\]](#)

Meridians Majors, meridians menors i meridians disminuïts

```
In[214]:= Show[TorMm0, PuntsTorMmd, GDo, Gdo, Gdod,
  lmuestra
  GRe, Gre, Gred, GFa, Gfa, Gfad, GSol, Gsol, Gsold]
```



```
In[215]:= Show[TorMm0, PuntsTorMmd2, GDo, Gdo,
  lmuestra
  Gdod, GRe, Gre, Gred, GFa, Gfa, Gfad, GSol, Gsol, Gsold];
```

Acords Augmentats

Coeficients de Fourier, magnituds i fases

Funció característica

```
In[216]:= acordsA =  
  {{1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0},  
   {0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1},  
   {1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0},  
   {0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1},  
   {1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0},  
   {0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1}};
```

Coeficients de Fourier

```
In[217]:= CoefA = Table[Fourier[acordsA[[k]], FourierParameters -> {1, -1}], {k, 1, 12}];  
          |tabla      |transformada de Fourier discreta |parámetros de transformada de Fourier  
  
In[218]:= TableForm[CoefA,  
  |forma de tabla  
  TableHeadings -> {{ "Do Aug", "Reb Aug", "Re Aug", "Mib Aug", "Mi Aug", "Fa Aug",  
    |cabeceras de tabla      |repite      |parte real  
    "Fa# Aug", "Sol Aug", "Lab Aug", "La Aug", "Sib Aug", "Si Aug"},  
    {"a0", "a1", "a2", "a3", "a4", "a5", "a6", "a7", "a8", "a9", "a10", "a11"}}];
```

Magnituds

```
In[219]:= TableForm[Abs[CoefA], TableHeadings ->  
  |forma de tabla |valor absoluto |cabeceras de tabla  
  {{ "Do Aug", "Reb Aug", "Re Aug", "Mib Aug", "Mi Aug", "Mi Aug", "Fa Aug", "Sol Aug",  
    |repite      |parte real  
    "Lab Aug", "La Aug", "Sib Aug", "Si Aug"}, {"|a0|", "|a1|", "|a2|", "|a3|",  
    "|a4|", "|a5|", "|a6|", "|a7|", "|a8|", "|a9|", "|a10|", "|a11|"}}];
```

Fases

Calculem les fases únicament dels coeficients que no són nuls.

```
In[220]:= fasesA = Table[Arg[CoefA[[k1]][[k2]]], {k1, 1, 12}, {k2, 1, 12, 3}];  
          |tabla      |argumento complejo
```

```
In[221]:= TableForm[fasesA,
  forma de tabla
  TableHeadings → {"Do Aug", "Reb Aug", "Re Aug", "Mib Aug", "Mi Aug", "Mi Aug",
    cabeceras de tabla repite parte real
    "Fa Aug", "Sol Aug", "Lab Aug", "La Aug", "Sib Aug", "Si Aug"},
  {"arg(a0)", "arg(a3)", "arg(a6)", "arg(a9)"}] ;
```

Representació en l'espai

Definició del tor

```
In[222]:= RA = Abs[CoefA[[1]][[4]]]
  valor absoluto

Out[222]= 3.

In[223]:= rA = Abs[CoefA[[1]][[6]]]
  valor absoluto

Out[223]= 0.

In[224]:= TOR[u_, v_] := {(RA + rA Cos[v]) Cos[u], (RA + rA Cos[v]) Sin[u], rA Sin[v]}
  coseno coseno coseno seno seno

In[225]:= TorA = ParametricPlot3D[TOR[u, v], {u, 0, 2 * Pi}, {v, 0, 2 * Pi},
  gráfico paramétrico 3D número pi número pi
  Axes → None, PlotStyle → Directive[Thick, Black, Opacity[1]]];
  ejes ning... estilo de repre... directiva grueso negro opacidad

In[226]:= Show[TorMm0, TorA];
  muestra
```

Els meridians tonals com a representació dels acords augmentats

Es considera el meridià augmentat com el meridià del tor de radi $RA=|a_3|=3$, que és una circumferència amb centre sobre del tor (degenerat) Augmentat.

```
In[227]:= MeridiaA[u_, v_] := {(RA + RA Cos[v]) Cos[u], (RA + RA Cos[v]) Sin[u], RA Sin[v]}
  coseno coseno coseno seno seno
```

Càlcul i representació dels centres dels meridians

Com que les fases dels coeficients a_3 dels acords Augmentats coincideixen les fases dels coeficients a_3 dels disminuïts, usarem **CoordGPladod** de cara a substituir l'angle per trobar els meridians.

```
In[228]:= centreDoA = {RA Cos[CoordGPladod[[1]]], RA Sin[CoordGPladod[[1]]], 0};
  coseno seno

In[229]:= PuntcentreDoA = ListPointPlot3D[{centreDoA},
  representación 3D en puntos de lista
  PlotStyle → Directive[{PointSize[0.02], Black, Opacity[0.7]}]];
  estilo de repre... directiva tamaño de punto negro opacidad

In[230]:= centreReA = {RA Cos[CoordGPlared[[1]]], RA Sin[CoordGPlared[[1]]], 0};
  coseno seno
```



```

In[231]:= PuntcentreReA = ListPointPlot3D[{centreReA},
      |representació 3D en punts de lista
      PlotStyle → Directive[{PointSize[0.02], Black, Opacity[0.7]}]];
      |estilo de repre... |directiva |tamaño de punto |negro |opacidad

In[232]:= centreFaA = {RA Cos[CoordGPlafad[[1]]], RA Sin[CoordGPlafad[[1]]], 0};
      |coseno |seno

In[233]:= PuntcentreFaA = ListPointPlot3D[{centreFaA},
      |representació 3D en punts de lista
      PlotStyle → Directive[{PointSize[0.02], Opacity[0.7], Black]}]];
      |estilo de repre... |directiva |tamaño de punto |opacidad |negro

In[234]:= centreSola = {RA Cos[CoordGPlasold[[1]]], RA Sin[CoordGPlasold[[1]]], 0};
      |coseno |seno

In[235]:= PuntcentreSola = ListPointPlot3D[{centreSola},
      |representació 3D en punts de lista
      PlotStyle → Directive[{PointSize[0.02], Black, Opacity[0.7]}]];
      |estilo de repre... |directiva |tamaño de punto |negro |opacidad

```

Representació dels acords Augmentats

```

In[236]:= GDoA = ParametricPlot3D[MeridiaA[CoordGPladod[[1]], v],
      |gràfic paramètric 3D
      {v, 0, 2 * Pi}, Axes → None, PlotStyle → Directive[Black, Opacity[0.7]]];
      |núm... |lejes |lning... |estilo de repre... |directiva |negro |opacidad

In[237]:= GReA = ParametricPlot3D[MeridiaA[CoordGPlared[[1]], v],
      |gràfic paramètric 3D
      {v, 0, 2 * Pi}, Axes → None, PlotStyle → Directive[Black, Opacity[0.7]]];
      |núm... |lejes |lning... |estilo de repre... |directiva |negro |opacidad

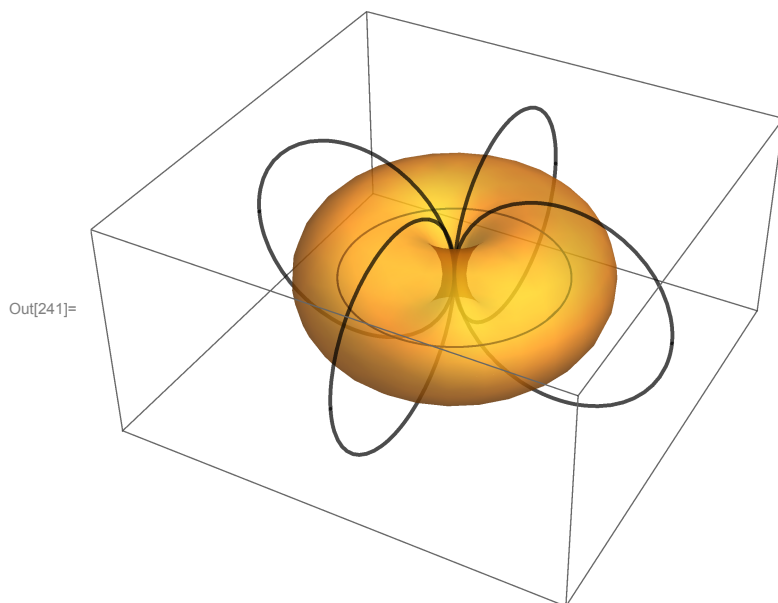
In[238]:= GFaA = ParametricPlot3D[MeridiaA[CoordGPlafad[[1]], v],
      |gràfic paramètric 3D
      {v, 0, 2 * Pi}, Axes → None, PlotStyle → Directive[Black, Opacity[0.7]]];
      |núm... |lejes |lning... |estilo de repre... |directiva |negro |opacidad

In[239]:= GSola = ParametricPlot3D[MeridiaA[CoordGPlasold[[1]], v],
      |gràfic paramètric 3D
      {v, 0, 2 * Pi}, Axes → None, PlotStyle → Directive[Black, Opacity[0.7]]];
      |núm... |lejes |lning... |estilo de repre... |directiva |negro |opacidad

In[240]:= Show[TorMm0, TorA, GDoA, GReA, GFaA, GSola, PuntcentreDoA,
      |mostra
      PuntcentreReA, PuntcentreFaA, PuntcentreSola, PlotRange → Automatic];
      |rango de repre... |automàtic

```

```
In[241]:= Show[TorMm0, TorA, GDoA, GReA, GFaA, GSolA, PlotRange → Automatic, Axes → None]
           Lmuestra                                Lrango de repre... Lautomático Lejes Lninguno
```



Representació dels acords Augmentats sobre el tor de les tonalitats

```
In[242]:= MDo = ParametricPlot3D[Meridian[CoordGPladod[[1]], v],
           Lgráfico paramétrico 3D
           {v, 0, 2 * Pi}, Axes → None, PlotStyle → Directive[Black, Opacity[1]]];
           Lnúm... Lejes Lning... Lestilo de repre... Ldirectiva Lnegro Lopacidad

In[243]:= MRe = ParametricPlot3D[Meridian[CoordGPlared[[1]], v],
           Lgráfico paramétrico 3D
           {v, 0, 2 * Pi}, Axes → None, PlotStyle → Directive[Black, Opacity[1]]];
           Lnúm... Lejes Lning... Lestilo de repre... Ldirectiva Lnegro Lopacidad

In[244]:= MFa = ParametricPlot3D[Meridian[CoordGPlafad[[1]], v],
           Lgráfico paramétrico 3D
           {v, 0, 2 * Pi}, Axes → None, PlotStyle → Directive[Black, Opacity[0.6]]];
           Lnúm... Lejes Lning... Lestilo de repre... Ldirectiva Lnegro Lopacidad

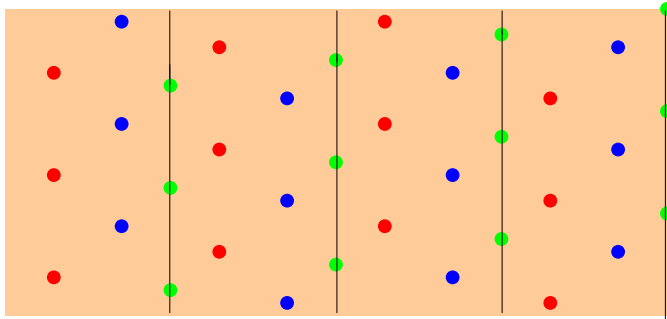
In[245]:= MSol = ParametricPlot3D[Meridian[CoordGPlasold[[1]], v],
           Lgráfico paramétrico 3D
           {v, 0, 2 * Pi}, Axes → None, PlotStyle → Directive[Black, Opacity[1]]];
           Lnúm... Lejes Lning... Lestilo de repre... Ldirectiva Lnegro Lopacidad

In[246]:= Show[TorMm0, PuntsTorMmd, GDo, Gdo, GRe,
           Lmuestra
           Gre, GFa, Gfa, GSol, Gsol, MDo, MRe, MFa, MSol, Axes → None];
           Lejes Lninguno
```

Representació de tots els acords tríades en el tor (pla) de les tonalitats

```
In[247]:= Show[
  Lmuestra
  Graphics[ {Orange, Opacity[0.4], Rectangle[{- (R + r) Pi, - r Pi}, {(R + r) Pi, r Pi}]},
    Lgráfico      Lnaranja      Lopacidad      Lrectángulo      Lnúmero··Lnúmero pi      Lnúme··Lnúmero pi
  ListPlot[CoordPlam, PlotStyle → Directive[{PointSize[0.02], Red}]],
    Lrepresentación de lista      Lestilo de repre··      Ldirectiva      Ltamaño de punto      Lrojo
  ListPlot[CoordPlam, PlotStyle → Directive[{PointSize[0.02], Blue}]],
    Lestilo de repre··      Ldirectiva      Ltamaño de punto      Lazul
  ListPlot[CoordPlad, PlotStyle → Directive[{PointSize[0.020], Green}]],
    Lrepresentación de lista      Lestilo de repre··      Ldirectiva      Ltamaño de punto      Lverde
  PlotRange → Automatic]
  Lrango de repre··      Lautomático
```

Out[247]=



```
In[248]:= Show[TorMm0, PuntsTorMmd, MDo, MRe, MFa, MSol]
  Lmuestra
```

Out[248]=

